VĂN NHƯ CƯƠNG – PHẠM ĐỨC QUANG
NGUYỄN THẾ THẠCH – HÀ ĐỨC VƯỢNG

HƯỚNG DẪN
ÔN TẬP THI TỐT NGHIỆP THPT

NĂM HỌC 2013 - 2014
MÔN TOÁN

(Tái bản lần thứ tư có chỉnh lí, bổ sung)

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

http://sachviet.edu.vn

Đọc góp ý :

GS. ĐOÀN QUỲNH

TS. TRẦN HỮU NAM

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Lời nói đầu

Cuốn sách *"Hướng dẫn ôn tập thi tốt nghiệp THPT năm học 2013 – 2014 môn Toán"* nằm trong bộ tài liệu **"Hướng dẫn ôn tập thi tốt nghiệp Trung học phổ thông"** của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam. Cuốn sách bám sát chuẩn kiến thức, kĩ năng của chương trình THPT, và nội dung Hướng dẫn ôn tập mà Vụ Giáo dục Trung học, Bộ Giáo dục và Đào tạo chỉ đạo các Sở Giáo dục và Đào tạo, các trường Trung học phổ thông thực hiện, nhằm chuẩn bị đầy đủ điều kiện cho học sinh tham dự các kì thi tốt nghiệp Trung học phổ thông. Đặc biệt, sách được chỉnh sửa theo **Hướng dẫn điều chỉnh nội dung dạy học** của Bộ Giáo dục & Đào tạo.

Cuốn sách này gồm hai phần :

Phần một. Các bài toán ôn tập theo chủ đề.

Có tất cả 7 chủ đề thường gặp trong các đề thi tốt nghiệp. Trong mỗi chủ đề, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ bản cần nhớ và các dạng toán cần luyện tập. Sau đó sẽ trình bày một số bài toán ôn tập kèm theo lời giải.

Các nội dung in đậm, nghiêng dành cho học sinh học theo chương trình Nâng cao.

Để cho học sinh tiện theo dõi và làm bài, chúng tôi xếp các bài tập có nội dung gần nhau theo từng nhóm bài, đánh số §1, §2, ...

Phần hai. Một số đề tham khảo.

Chúng tôi đưa ra 10 đề tham khảo. Các đề bảo đảm phủ kín các chủ đề ôn tập, bám sát chuẩn kiến thức, kĩ năng và có tính phân hoá (đảm bảo đúng mức độ biết, hiểu, vận dụng).

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Các em học sinh có thể làm theo các đề đã cho, có đối chiếu thời gian làm bài 150 phút để rút kinh nghiệm.

Các tác giả hi vọng với những nội dung cơ bản nhất, cuốn sách này sẽ giúp các em học sinh chuẩn bị tốt kiến thức cho các kì thi với hình thức đề thi tự luận ở môn Toán, cũng như hỗ trợ các thầy cô giáo nắm vững định hướng, nội dung, phương pháp, yêu cầu, kĩ thuật cơ bản để giúp học sinh chuẩn bị năng lực và tâm thế tốt nhất cho các kì thi tốt nghiệp THPT.

Các tác giả xin chân thành cảm ơn GS. Đoàn Quỳnh, TS. Trần Hữu Nam về những góp ý quý báu cho cuốn sách.

Các tác giả cũng chân thành cảm ơn các em học sinh, các thầy cô giáo, các bậc cha mẹ học sinh và các bạn đọc về những ý kiến đóng góp cho cuốn sách này.

Mọi ý kiến xin gửi về :

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI, TOÀ NHÀ VĂN PHÒNG HEID, NGÕ 12, LÁNG HẠ, BA ĐÌNH, HÀ NỘI.

Xin trân trọng cảm ơn.

Hà Nội, tháng 01 năm 2014

CÁC TÁC GIẢ

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Phần một

CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ

Chủ đề 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM, KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Hàm số, tính đơn điệu của hàm số, mối liên hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của một hàm số và dấu của đạo hàm cấp một của nó.
2. Điểm cực đại, điểm cực tiểu (điểm cực trị) của hàm số. Các điều kiện đủ để hàm số có điểm cực trị .
3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số.
4. ***Phép tịnh tiến hệ toạ độ và công thức đổi toạ độ qua phép tịnh tiến đó.***
5. Đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, ***tiệm cận xiên*** của đồ thị.
6. Các bước khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, ***tìm điểm uốn của đồ thị một số hàm số,*** tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị). Giao của hai đồ thị. ***Sự tiếp xúc của hai đường cong (điều kiện cần và đủ để hai đường cong tiếp xúc nhau).***

Các dạng toán cần luyện tập :

1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, bất phương trình hoặc chứng minh bất đẳng thức; cụ thể:

   Các bài toán về đồng biến, nghịch biến (tính đơn điệu) của hàm số :

   Thường sử dụng định lí : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên D (D là một đoạn, một khoảng hoặc nửa khoảng).

   f(x) đồng biến trên D $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in D$;

   f(x) nghịch biến trên D $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

   (chỉ xét trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên D).

2. Tìm điểm cực trị của hàm số, tính giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số ; tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn, một khoảng ; ứng dụng vào việc giải phương trình, bất phương trình; cụ thể:

LTĐH-CĐ-TOÁN-LÍ-HÓA-000B-TRẦN HƯNG ĐẠO-TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Các bài toán về cực trị của hàm số :

Thường sử dụng quy tắc I, lập bảng biến thiên ; hoặc sử dụng quy tắc II: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C).

Nghiệm x_0 của phương trình $f'(x) = 0$ thường là hoành độ của điểm cực trị.

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại (CĐ) tại $x = x_0$.

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu (CT) tại $x = x_0$.

Lưu ý : Trong trường hợp cả $f'(x) = 0$ lẫn $f''(x) = 0$ thì ta cần sử dụng quy tắc I để tìm cực trị.

3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Ta thường dùng các kiến thức sau :

- Đường thẳng d : $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thoả mãn :

  $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

- Đường thẳng d : $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

- Đường thẳng $y = ax + b$ là ***tiệm cận xiên*** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

  $$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = a, \quad (a \neq 0); \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left[f(x) - ax\right] = b.$$

4. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số

   $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$,

   $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$,

   $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$,

   $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, $am \neq 0$.

5. Dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm của một phương trình.

   Cho hai hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2). Khảo sát sự tương giao giữa hai đồ thị (C_1) và (C_2) tương đương với khảo sát số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (1). Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm (1).

LTĐH-TOÁN LÝ HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (tại một điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số) :

- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

  Lưu ý: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có hệ số góc $k = f'(x_0)$.

- Biết hệ số góc của tiếp tuyến là k, giải phương trình $f'(x) = k$ để tìm nghiệm x_0, tìm được $y_0 = f(x_0)$ rồi viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y = k(x - x_0) + y_0$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

§1. Tính đơn điệu của hàm số

1. Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x^2 - 3x}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}}$.

2. Tìm tập giá trị của hàm số:

a) $y = 3\sin x - 4\cos x + 5$; b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; c) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, với $x > 0$.

3. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3$; b) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x + 2$;

c) $y = \dfrac{3x + 1}{1 - 2x}$; d) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x - 1}$.

4. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số

a) $y = x^4 - 4x^2 + 1$; b) $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$;

c) $y = \cos 2x + 4\cos x$; $x \in [0; 2\pi]$.

5. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x - 1 - \sqrt{3x - 5}$.

6. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

$y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m + 6)x - (2m + 1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUI NHƠN

http://sachviet.edu.vn

7. Giải phương trình $\log_2(x-2) = \frac{-x^2+2x+3}{x+1}$.

8. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 2$ đồng biến trên tập xác định.

9. Chứng minh rằng $\log_2 x < x$ với mọi giá trị dương của x.

10. Chứng minh rằng $\frac{4}{3}\sin^3 x + \sin^2 x + \frac{1}{2} > 0$ với mọi giá trị của x.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Biểu thức của hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3. \end{cases}$

Vậy tập xác định (TXĐ) của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{0;3\}$.

b) Biểu thức của hàm số có nghĩa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x \neq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+2x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \\ x < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \\ x < -2. \end{array}\right.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty;-2) \cup [-1;0) \cup [1;+\infty)$.

2. a) Hàm số đã cho xác định và liên tục với mọi giá trị của x.

Ta có $(3\sin x - 4\cos x)^2 \leq (3^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)$, từ đó $-5 \leq 3\sin x - 4\cos x \leq 5$, suy ra $0 \leq 3\sin x - 4\cos x + 5 \leq 10$. Vậy $0 \leq y \leq 10$. Dễ thấy $y = 0$ chẳng hạn, khi $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$;

$y = 10$ chẳng hạn, khi $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Do đó tập giá trị của hàm số đã cho là [0; 10].

b) Hàm số đã cho xác định và liên tục với mọi giá trị của x.

Ta có $y'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, $y'(x) = 0$ khi $x = 0$.

Mặt khác, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HOÁ 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'(x)		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-1	↗	1

Căn cứ bảng biến thiên ta thấy $-1 \le y < 1$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-1; 1)$.

c) Hàm số đã cho xác định và liên tục với các giá trị $x > 0$. Ta có thể sử dụng đạo hàm để tìm tập giá trị của hàm số theo cách đã nêu trên.

Tuy nhiên có thể sử dụng tính chất của bất đẳng thức như sau:

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

Mặt khác, với $x > 0$ thì $y = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} \ge 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} = 2$.

$$y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $[2; +\infty)$.

3. a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^3 - x = x(x^2-1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	$\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0 ; 1)$.

b) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2x^2 - 2 = 2(x^2-1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến (tăng) trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1\ ;\ +\infty)$, nghịch biến (giảm) trên khoảng $(-1\ ;\ 1)$.

c) Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5}{(1-2x)^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\frac{3}{2}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$-\frac{3}{2}$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

d) Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y' = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(2x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 2000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 8x$; $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số tăng trên mỗi khoảng: $(-\sqrt{2}\,;\,0)$; $(\sqrt{2}\,;\,+\infty)$ và giảm trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,-\sqrt{2}\,)$, $(0;\,\sqrt{2}\,)$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $x = 3$.

ĐS : Hàm số tăng trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(3;\,+\infty)$ và giảm trên mỗi khoảng $(-1;\,1)$, $(1;\,3)$.

c) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ và được xét trên đoạn $[0;\,2\pi]$.

Đạo hàm: $y = \cos 2x + 4\cos x = 2\cos^2 x + 4\cos x - 1$

$y' = -4\cos x.\sin x - 4\sin x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4\sin x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ trên đoạn $[0;\,2\pi]$ có $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Bảng biến thiên:

x	0		π		2π
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	5	↘	-3	↗	5

Vậy hàm số giảm trên $(0;\,\pi)$ và tăng trên $(\pi;\,2\pi)$.

5. Hàm số đã cho xác định trên tập $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Ta có $y' = 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{89}{48}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên :

x	$\frac{5}{3}$		$\frac{89}{48}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	$\frac{47}{24}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3};\frac{89}{48}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(\frac{89}{48};+\infty\right)$.

6. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$. Đây là hàm đa thức bậc ba nên :

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = x^2 + 2mx + m + 6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3.$$

Vậy với $m \in [-2 ; 3]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

7. Đặt $t = \log_2(x-2) \Leftrightarrow x - 2 = 2^t > 0$ $(x > 2)$. Phương trình đã cho trở thành $x^2 + (t-2)x + t - 3 = 0$, phương trình bậc hai này có tổng hệ số $a - b + c = 0$, nên có nghiệm là $x = -1$ (loại), $x = -t + 3$. Từ đó $\log_2(x-2) = 3 - x$ (*).

Dễ thấy $x = 3$ là nghiệm của (*); Do hàm số $f(x) = \log_2(x-2)$ đồng biến trên tập $(2;+\infty)$, hàm số $g(x) = 3 - x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Vậy trong khoảng $(2;+\infty)$ hai đồ thị cắt nhau tại một điểm duy nhất $(3;0)$, nghĩa là phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

8. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = x^2 - 4x + m$.

Tìm m theo điều kiện: $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 4 - m \leq 0 \Rightarrow m \geq 4$.

Vậy khi $m \geq 4$ thì hàm số tăng trên tập xác định.

9. Ta xét hàm số $f(x) = x - \log_2 x$ với $x > 0$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x.\ln 2} = \frac{x\ln 2 - 1}{x\ln 2}; f'(x) = 0 \text{ tại } x = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e$$

$$f(\log_2 e) = \log_2 e - \log_2(\log_2 e) = \log_2 \frac{e}{\log_2 e} \approx 0,9139 > 0.$$

Ta có bảng biến thiên

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 2008 TRẦN TÙNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

x	0		$\log_2 e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$0,9139$	↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, $\forall x > 0$ có $f(x) > 0,9139 > 0$;

Từ đó có $\log_2 x < x$, $\forall x > 0$.

10. Đặt $t = \sin x$, ta có $-1 \le t \le 1$ với mọi giá trị của x.

Khi đó, xét $y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2}$ với $-1 \le t \le 1$.

Cần chứng minh $y > 0$ với mọi t thuộc $[-1; 1]$.

$y'(t) = 4t^2 + 2t$;

$y'(t) = 0$ khi $t = 0$ hoặc $t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{7}{12}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{17}{6}$

Căn cứ bảng biến thiên ta có $y > 0$ với mọi giá trị của t trong đoạn $[-1; 1]$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

§2. Cực trị của hàm số

1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - x^4$;

b) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$;

c) $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$;

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$;

e) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10$;

g) $f(x) = \sin x + \cos x$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2. Tìm cực trị của các hàm số

a) $y = x^3(1-x)^2$; b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$. (1)

a) Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

4. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$.

Tìm giá trị của tham số m để hàm số đạt cực đại tại điểm x = 1.

5. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + m}{4 - x}$ có cực đại và cực tiểu.

6. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại x = 2.

7. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m^2 - 1)}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

8. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. (C)

Viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) và tiếp xúc với (C).

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x - 4x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y		↗	1	↘	0	↗	1	↘	

Vậy: hàm số đạt CĐ bằng 1 tại $x = \pm 1$ và đạt CT bằng 0 tại x = 0.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	2	↘	‖	↘	6	↗	

Vậy hàm số đạt CĐ bằng 2 tại x = 0 và đạt CT bằng 6 tại x = 2.

c) Miền xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↗	

Vậy hàm số đạt CT bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tại $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (không có CĐ).

d) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	9	↘	5	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm x = 1, giá trị cực đại của hàm số là f(1) = 9.
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 3, giá trị cực tiểu của hàm số là f(3) = 5.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

e) TXĐ: D = $\mathbb{R}$.

Đạo hàm : $f'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

· Đạo hàm cấp hai :

$$f''(x) = 4(3x^2 - 12x + 11)$$

$$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow x_{CT} = 1;\ f_{CT} = f(1) = 1\ ;$$

$$f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow x_{CĐ} = 2;\ f_{CĐ} = f(2) = 2\ ;$$

$$f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow x_{CT} = 3;\ f_{CT} = f(3) = 1.$$

Vậy hàm số đạt giá trị cực đại bằng 2 tại điểm x = 2.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng 1 tại các điểm x = 1 và x = 3.

g) Trên tập hợp $D = (-\pi\ ;\ \pi)$ ta có $f'(x) = \cos x - \sin x$; $f''(x) = -\sin x - \cos x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ -\pi < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ -\pi < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ ;\ f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\ ;$$

Kiểm tra thấy $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$, $f''\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0$.

Vậy trên khoảng $(-\pi\ ;\ \pi)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \dfrac{\pi}{4}$, $f_{CĐ} = \sqrt{2}$;

hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\dfrac{3\pi}{4}$, $f_{CT} = -\sqrt{2}$.

2. a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y = x^3(1-x)^2 = f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$;

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = x^2(5x^2 - 8x + 3)\ ;\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{5} \\ x = 1. \end{array}\right.$$

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{108}{3125}$	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{3}{5}$, giá trị cực đại của hàm số là $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{108}{3125}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 1, giá trị cực tiểu của hàm số là f(1) = 0.

b) *Đáp số* : Hàm số đạt cực đại tại điểm x = −3, giá trị cực đại của hàm số là f(−3) = 71.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 2, giá trị cực tiểu của hàm số là f(2) = −54.

3. Hàm số đã cho xác định trên tập $D = (-\infty ; 1) \cup (1 ; +\infty)$

Ta có $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$;

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x - 1) - (x^2 + 2x)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} \text{ ; } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{3}$		1		$1 + \sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$4 - 2\sqrt{3}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$4 + 2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Vậy đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị là

$$C_1(1 - \sqrt{3} ; 4 - 2\sqrt{3}) \text{ và } C_2(1 + \sqrt{3} ; 4 + 2\sqrt{3}).$$

a) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là :

$$C_1C_2 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{60}.$$

b) Đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) chính là đường thẳng C_1C_2. Từ đó tìm được phương trình của d là y = 2x + 2.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. TXĐ : D = $\mathbb{R}$. Hàm đã cho là hàm số đa thức bậc ba.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

Giả sử hàm số đạt cực đại tại x = 1. Ta có :

$$y'(1) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại thấy chỉ có giá trị m = 2 thoả mãn yêu cầu bài toán, tức là hàm số đạt cực đại tại x = 1.

5. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-x^2 + 8x + m - 8}{(4-x)^2}$.

Tìm m theo điều kiện: y' triệt tiêu và đổi dấu 2 lần trên tập xác định

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - 8x + 8 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 8 + m > 0 \\ 4^2 - 8.4 + 8 - m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m > -8.$$

Vậy hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi m > – 8.

6. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$; $f''(x) = \dfrac{2}{(x+m)^3}$.

f(x) đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow \dfrac{m^2 + 4m + 3}{(2+m)^2} = 0 \Rightarrow m = -1$ hoặc $m = -3$.

Với m = –1 ta có $f''(2) = 2 > 0$: không thỏa mãn.

Với m = –3 ta có $f''(2) = -2 < 0$, thỏa mãn.

Vậy m = –3.

7. TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1. \end{array}\right.$$

LTĐH-CĐ TOÁN- LÍ- HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$2m-2$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$2m+2$	↗	$+\infty$

Vậy, với mọi giá trị của m, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = m - 1$, $y_{CĐ} = 2m - 2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = m + 1$, $y_{CT} = 2m + 2$.

8. $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = x+1+\dfrac{1}{x+1}$ $(x \neq -1)$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị $A(-2;-2)$ và $B(0;2)$; Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;4)$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}(1\ ;\ 2)$, phương trình đường thẳng $(d) \perp AB$ có dạng: $x+2y+c=0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{x+c}{2}$ (d). Do đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} = -\frac{x+c}{2} \quad (x \neq -1) \Leftrightarrow f(x) = 3x^2+(c+5)x+c+4 = 0 \ (*)$$

Nghiệm của (*) là hoành độ của tiếp điểm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 3-c-5+c+4 \neq 0 \\ \Delta = (c+5)^2 - 12(c+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c^2-2c-23=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1-2\sqrt{6} \\ c = 1+2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) là $\left[\begin{array}{l} x+2y+1-2\sqrt{6}=0 \\ x+2y+1+2\sqrt{6}=0 \end{array}\right.$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C).

§3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4 ; 4]$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{6-3x}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

LTĐH-CĐ TOÁN -LÍ -HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \text{ trên khoảng } (1\ ;\ +\infty).$$

5. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = \sin 2x - x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right].$$

6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$; b) $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$.

7. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$.

8. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2}$ trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

9. Một tứ diện ABCD có cạnh AB = CD ; các cạnh khác bằng 1 đơn vị dài. Hãy xác định độ dài AB để thể tích tứ diện ABCD đạt giá trị lớn nhất.

10. Tìm độ dài bán kính đáy và chiều cao của một hình trụ có thể tích V cho trước sao cho nó có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. Ta xét trên đoạn $[-4\ ;\ 4]$: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên :

x	-4		-1		3		4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-41	↗	40	↘	8	↗	15

Vậy $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = f(-4) = -41$; $\max\limits_{[-4;4]} f(x) = f(-1) = 40$.

2. Trên đoạn $[-1\ ;\ 1]$ ta có

$f'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{6 - 3x}} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $[-1\ ;\ 1]$.

Vậy : $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = 3$; $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{3}$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. Xét trên đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ta có

$$f'(x) = -2\sqrt{2}\sin 2x + 4\cos x \text{ ; } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4}\end{array}\right.$$

$$f''(x) = -4\sqrt{2}\cos 2x - 4\sin x \text{ ; } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4 > 0,\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{2}$, $f_{CT} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sqrt{2}$; đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{4}$, $f_{CĐ} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$; $f(0) = \sqrt{2}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sqrt{2}$. Từ đó suy ra

$$\max_{[0;\frac{\pi}{2}]} f(x) = \max\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}\} = 2\sqrt{2} \text{ ;}$$

$$\min_{[0;\frac{\pi}{2}]} f(x) = \min\{\sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}\} = \sqrt{2}.$$

Nhận xét. Có thể đặt t = sinx ($0 \le t \le 1$), đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $g(t) = -2\sqrt{2}t^2 + 4t + \sqrt{2}$ trên đoạn [0 ; 1].

4. Ta xét trên khoảng $(1 ; +\infty)$: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vì $0 \notin (1 ; +\infty)$).

Bảng biến thiên

x	1		2		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	3	↗	+∞

Vậy $\min_{x \in (1;+\infty)} f(x) = f(2) = 3$. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

5. *Hướng dẫn :* Dùng Quy tắc II tìm cực đại, cực tiểu. So sánh các giá trị cực đại, cực tiểu và giá trị của hàm số tại hai đầu mút (có thể dùng máy tính bỏ túi), ta có $\max f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\min f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Nhận xét : Có thể lập bảng biến thiên để tìm ra kết quả trên.

LTĐH-CĐ-TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. a) TXĐ : D = ℝ

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số không có giá trị lớn nhất trên ℝ nhưng có giá trị nhỏ nhất $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(1) = 5$.

b) TXĐ : D = ℝ . Đặt $t = \sin^2 x$ thì $0 \le t \le 1$, xét $y = f(t) = t^2 - 4t + 5$, khi đó giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên ℝ chính là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn [0 ; 1].

Ta có : $f'(t) = 2t - 4 < 0,\ \forall t \in [0;1]$.

Suy ra, $\max_{[0;1]} f(t) = f(0) = 5$; $\min_{[0;1]} f(t) = f(1) = 2$.

7. Tập xác định : D = ℝ.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	1	↗	2	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1

Vậy: max y = 2 tại x = –1, min y = $\frac{2}{3}$ tại x = 1.

8. Ta nhận thấy hàm số $y = f(x) = x\sqrt{x^2-2}$ xác định với mọi $x \in [\sqrt{2}; 2]$.

Đạo hàm

$f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \notin [\sqrt{2}; 2]$; $f'(x) > 0$ với $\forall x \in [\sqrt{2}; 2]$

TĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

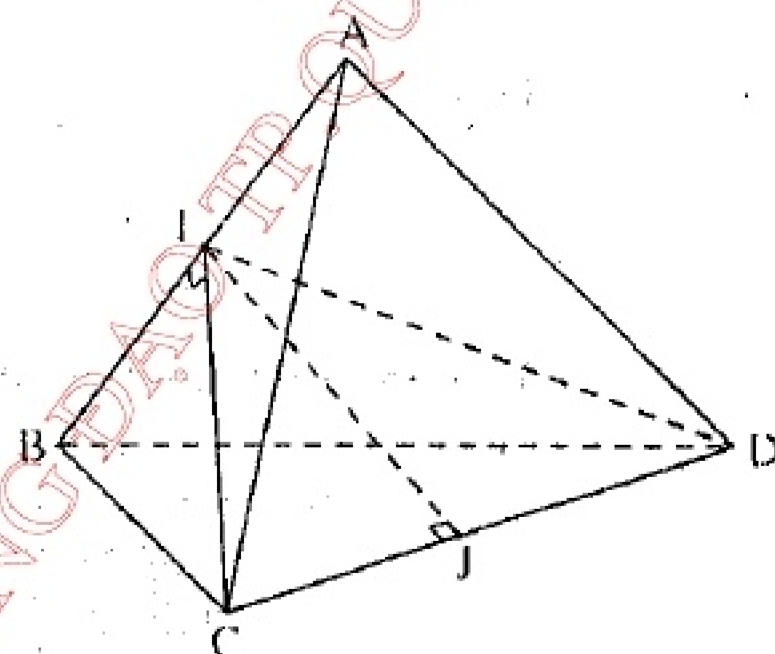
http://sachviet.edu.vn

Bảng biến thiên:

x	$\sqrt{2}$		2
y'	‖	+	|
y	0	↗	$2\sqrt{2}$

Vậy trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$ ta có: $\min\limits_{[\sqrt{2};2]} f(x) = 0$ khi $x = \sqrt{2}$; $\max\limits_{[\sqrt{2};2]} f(x) = 2\sqrt{2}$ khi $x = 2$;

9. (h.1) Gọi I, J là trung điểm 2 cạnh AB và CD. Ta dễ dàng chứng minh được IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD và $AB \perp CD$.



Hình 1

Ta có

$$V = V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{BICD} = 2V_{AICD}$$

$$= 2.\frac{1}{3}AI.(\frac{1}{2}IJ.CD) = \frac{1}{6}IJ.CD.AB.$$

Do các tam giác CIJ và CIA là tam giác vuông, nên $IJ^2 = IC^2 - CJ^2$

$$= AC^2 - AI^2 - CJ^2 = 1 - 2AI^2 = 1 - \frac{AB^2}{2}.$$

Đặt $AB = x$, suy ra $IJ = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ (điều kiện: $0 < x < \sqrt{2}$).

Vậy $V = \frac{1}{6}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.x.x = \frac{\sqrt{2}}{12}x^2\sqrt{2 - x^2}$ với $0 < x < \sqrt{2}$

$$\Rightarrow V' = \frac{x\sqrt{2}}{12}\frac{\left(4 - 3x^2\right)}{\sqrt{2 - x^2}}; \; V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
V'		+	0	−	0	+	0	−		+
V						↗	$\frac{2\sqrt{3}}{27}$ (CĐ)	↘		

Vậy : $\max\limits_{(0;\sqrt{2})} V = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ (đvtt), tại $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN
http://sachviet.edu.vn

10. Gọi $x > 0$ là bán kính đáy, $h > 0$ là chiều cao, S là diện tích toàn phần của hình trụ, ta có : $\pi x^2 h = V \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi x^2}$

$$S = 2\pi xh + 2\pi x^2 = 2\pi x.\frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2;$$

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Mặt khác, $S''(x_0) = \dfrac{4V}{x_0^3} + 4\pi > 0.$

Vậy hàm số S(x) có giá trị cực tiểu tại $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, đó cũng là giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần của hình trụ. Kích thước hình trụ lúc này là

$$h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}};\ x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

§4. Đồ thị hàm số

1. Bằng đồ thị, biện luận theo k số nghiệm của phương trình $\left|\dfrac{x^2}{2} - 5\right| = k.$

2. Bằng đồ thị, tìm m để phương trình sau có sáu nghiệm phân biệt :

$$2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| = m + 4.$$

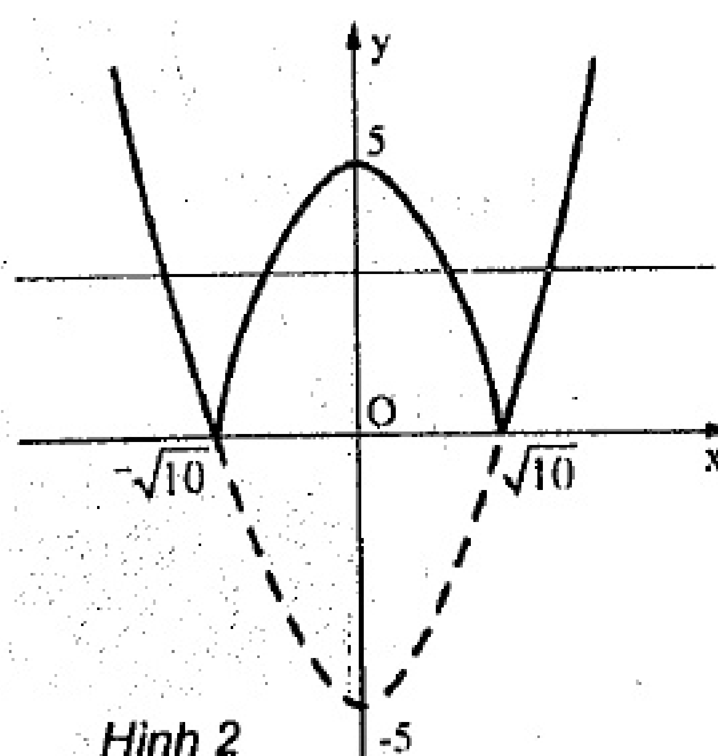
Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. Số nghiệm của phương trình $\left|\dfrac{x^2}{2} - 5\right| = k\ (*)$ là số giao điểm của hai đồ thị

$y = \left|\dfrac{x^2}{2} - 5\right|$ (C') và $y = k$.

Đồ thị (C') gồm có (h.2) :

– Phần đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - 5$ nằm phía trên trục hoành ;



Hình 2

LTĐH CẤP TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

– Phần hình đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành.

Dựa vào đồ thị ta có 5 trường hợp về số nghiệm :

+ Với $k > 5$: Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

+ Với $k = 5$: Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

+ Với $0 < k < 5$: Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt.

+ Với $k = 0$: Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

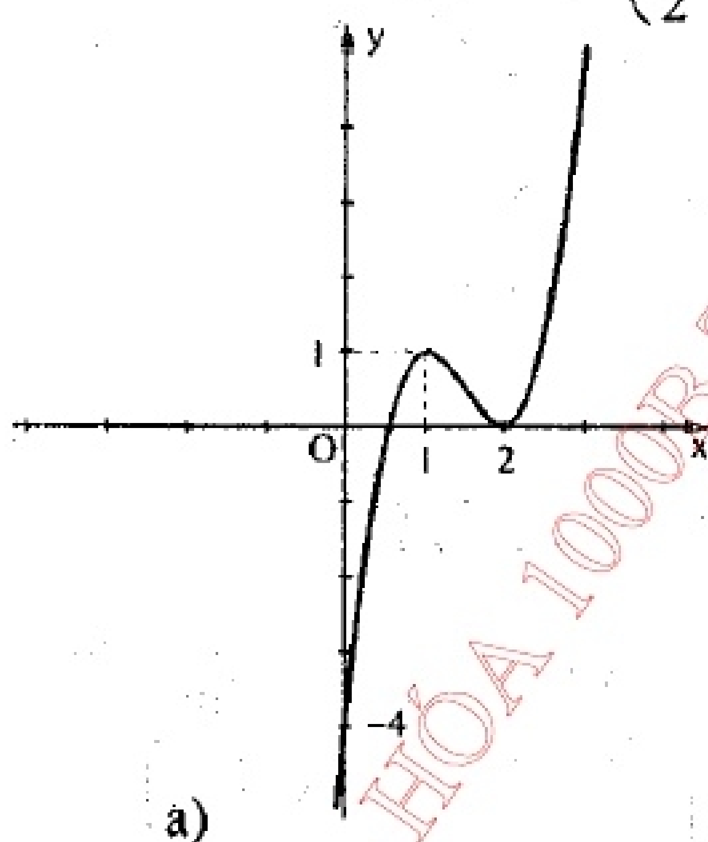
+ Với $k < 0$: Phương trình (*) vô nghiệm.

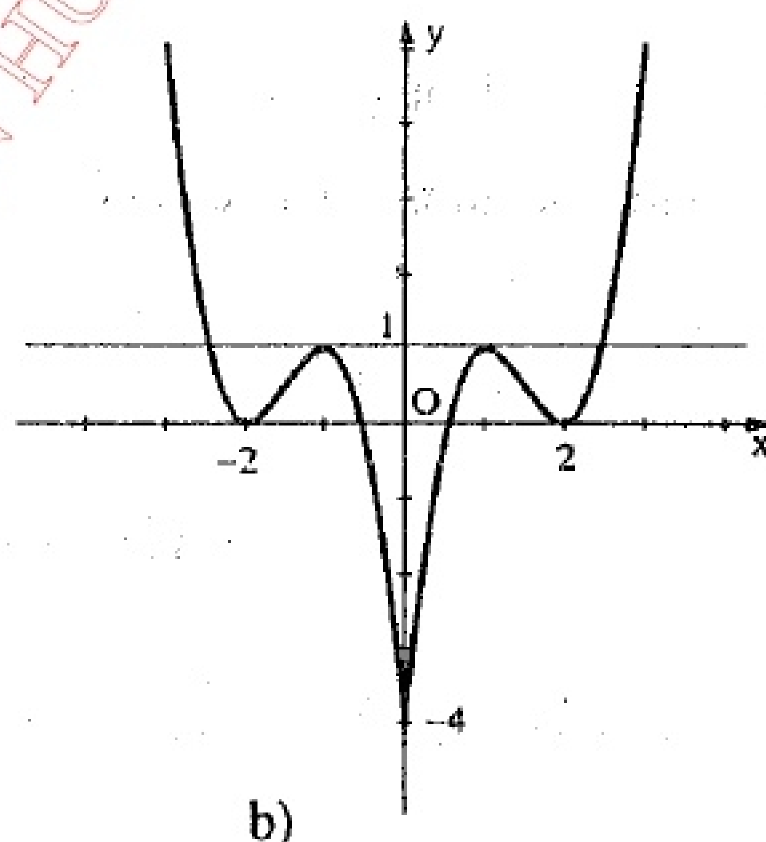
2. HS tự khảo sát hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

– Đồ thị (h.3a) :

+ Giao với Oy tại $(0 ; -4)$;

+ Giao với Ox tại $(2 ; 0)$, $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.





Hình 3

Phương trình đã cho $2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| = m + 4$ (*)

có số nghiệm bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị của hàm số $y = g(x) = 2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4$.

Do hàm số $y = g(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng (h.3b).

Đáp số : Phương trình có sáu nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

§5. Đường tiệm cận

1. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị mỗi hàm số :

a) $y = \frac{3x - 2}{2x + 1}$; b) $y = \frac{x + 3}{x^2 - 4}$.

2. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số

a) $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$; b) $y = \sqrt{\frac{x + 2}{x}}$.

3. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{-2x - 4}{x + 1}$; b) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$.

4. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 4}{2x + 1}.$$

5. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số : $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x + 2}$.

6. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$; b) $y = \sqrt[3]{x^3 + 9x^2 - x - 1}$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Ta có : $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{3x - 2}{2x + 1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x - 2}{2x + 1} = -\infty$;

suy ra đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta lại có : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{3}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{3}{2}$; suy ra đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$.

Ta có : $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \frac{x + 3}{x^2 - 4} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \frac{x + 3}{x^2 - 4} = -\infty$;

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x^2-4}=+\infty.$$

Vậy các đường thẳng $x=-2$, $x=2$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-4}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x^2-4}=0$. Vậy đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. a) Xét hàm số $y=\frac{x^2+2x}{x-1}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}y=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+2x}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x}{x-1}=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Xét hàm số $y=\sqrt{\frac{x+2}{x}}$.

Tập xác định: $D=(-\infty\,;-2]\cup(0\,;+\infty)$.

Dễ thấy đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x+2}{x}}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

3. a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{-2x-4}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{-2x-4}{x+1}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x-4}{x+1}=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-4}{x+1}=-2$.

Suy ra đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to0^-}y=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^3+1}{x^2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3+1}{x^2}=+\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm\infty$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có : $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{3x^2 - 2x + 4}{2x + 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x^2 - 2x + 4}{2x + 1} = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta lại có : $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4}{x(2x + 1)} = \frac{3}{2}$;

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(y - \frac{3}{2}x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 4}{2x + 1} - \frac{3}{2}x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-7x + 8}{2(2x + 1)} \right) = -\frac{7}{4}.$$

Tương tự, ta có $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(y - \frac{3}{2}x \right) = -\frac{7}{4}$.

Vậy đường thẳng $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

5. TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta viết $y = x^2 + 1 - \frac{1}{x + 2}$.

Ta có : $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^+} y = -\infty$, do đó đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Giả sử $y = ax + b$ là tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số. Ta có :

$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2x} \right) = +\infty$. Suy ra không tồn tại hệ số a.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Do $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

6. a) TXĐ : $D = (-\infty ; -2) \cup (2 ; +\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{|x|}$ (chia cả tử và mẫu cho $|x|$).

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Từ đó $\lim_{x \to -\infty} y = -1$; $\lim_{x \to +\infty} y = 1$.

Vậy đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$ và đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$.

b) TXĐ : $\mathbb{R}$.

* Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của nó không có tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x \to \mp\infty} y = \mp\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

* Giả sử $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Khi đó :

$$a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = 1 \text{ và } b = \lim_{x \to \mp\infty} (y - ax) = 3.$$

Vậy đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

§6. Khảo sát, vẽ đồ thị hàm số

1. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = x^3 - 3x + 2$; b) $y = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1$; c) $y = \frac{4}{2 - x}$.

2. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = -x^3 + 3x + 1$; b) $y = \frac{4x + 1}{2x - 3}$.

3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2$. (1)

b) Dựa vào đồ thị của hàm số (1), hãy biện luận số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 + m = 0$ tuỳ theo giá trị của tham số m.

4. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$. (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1).

b) Dựa vào đồ thị của hàm số (1), hãy biện luận số nghiệm của phương trình $x^2\left|x^2 - 2\right| = m$ tuỳ theo giá trị của tham số m.

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + ax + 4}{x + b}$. (1)

a) Tìm các hệ số a, b để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm T(0; −2) , Đ(4; 6); sau đó khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số ứng với các hệ số đó.

b) Tìm m để đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị của hàm số (1) tại hai điểm phân biệt.

LTĐH-CĐ TOÁN- LIÊN HỆ 0000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ lại cắt (C) tại điểm A. Tính tọa độ của A.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) – Tập xác định : $\mathbb{R}$.

– Sự biến thiên của hàm số:

+ Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên :

Ta có: $y' = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(1 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 1)$.

Hàm số đạt giá trị cực đại bằng 4 tại điểm $x = -1$. Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng 0 tại điểm $x = 1$.

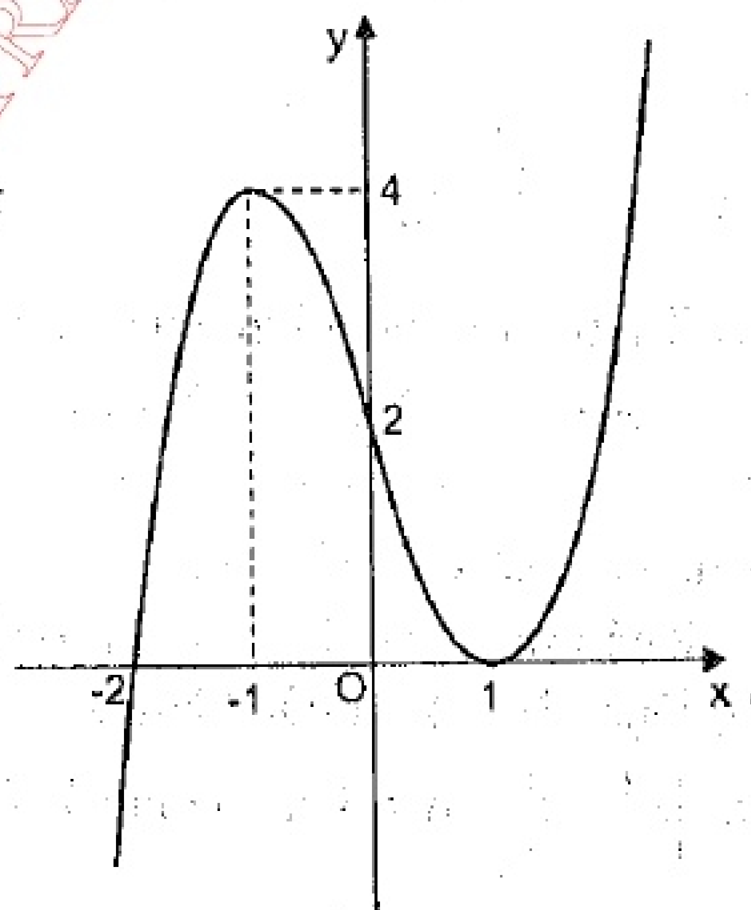
– Đồ thị (h.4):

+ Tâm đối xứng: Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 6x$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có I(0 ; 2) là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

+ Giao điểm của đồ thị với trục toạ độ: Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm (0 ; 2).

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là điểm (–2 ; 0) và (1 ; 0).



Hình 4

b) $y = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

Vì $(-x)^4 + \frac{3}{10}(-x)^2 + 1 = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

– Sự biến thiên của hàm số:

+ Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên :

Ta có: $y' = 4x^3 + \frac{3}{5}x = x(4x^2 + \frac{3}{5})$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

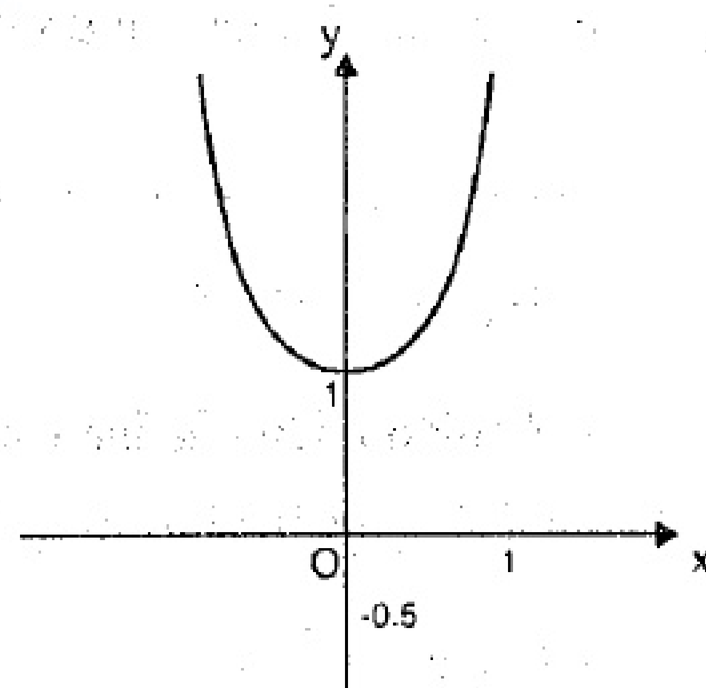
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.
Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng 1 tại điểm $x = 0$.

– Đồ thị (h.5):

+ Đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm (0; 1).



Hình 5

c) – Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

– Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên : $y' = \frac{4}{(2-x)^2}$;

y' không xác định khi $x = 2$; y' luôn luôn dương với mọi $x \neq 2$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$.

+ Cực trị

Hàm số đã cho không có cực trị.

+ Tiệm cận :

Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2-x} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) là tiệm cận ngang.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	0 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

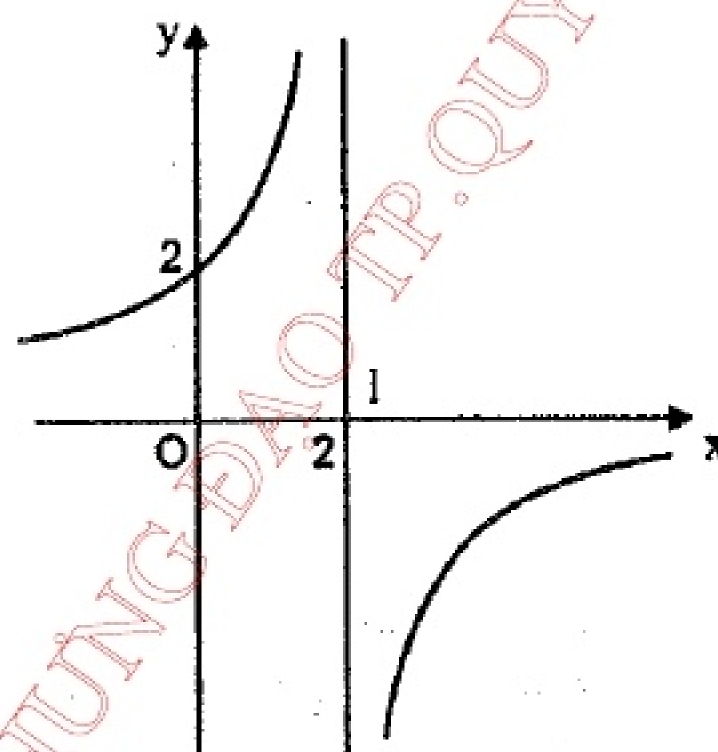
– Đồ thị (h.6)

Đồ thị cắt trục tung tại điểm A(0 ; 2).

Chú ý. Giao điểm của hai tiệm cận là I(2 ; 0). Nếu tịnh tiến hệ trục toạ độ theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ thì theo công thức đổi trục

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}$$

ta đưa hàm số đã cho về dạng $Y = \frac{-4}{X}$. Đó là hàm số lẻ, cho nên đồ thị có tâm đối xứng là điểm I.



Hình 6

2. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

– Tập xác định : ℝ.

– Sự biến thiên của hàm số :

+ Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

+ Bảng biến thiên :

Ta có $y' = -3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$, $(1 ; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Hàm số đạt giá trị cực đại bằng 3 tại $x = 1$.
Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng -1 tại $x = -1$.

– Đồ thị : (h. 7)

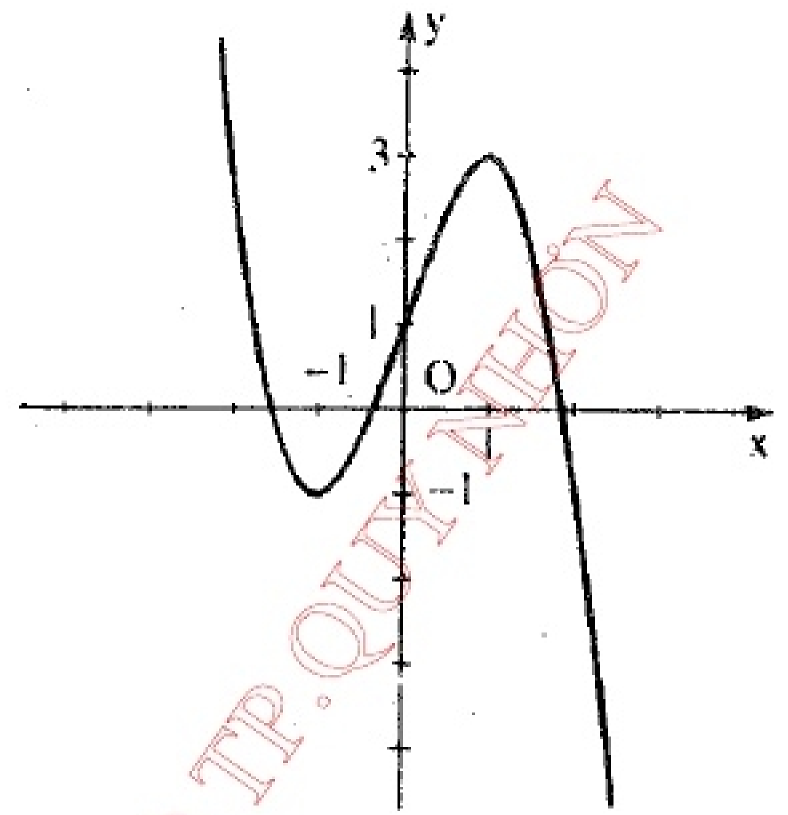
+ Giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ :

Giao điểm với trục tung là điểm (0 ; 1).

Giao điểm với trục hoành là ba điểm $(x_i\ ;\ 0)$, với $x_1 \approx -1,53$; $x_2 \approx -0,35$; $x_3 \approx 1,88$.

(*Chú ý :* Có thể dùng máy tính cầm tay để tính các giá trị nghiệm gần đúng của phương trình bậc ba.)

Đồ thị nhận điểm I(0 ; 1) làm tâm đối xứng.



Hình 7

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

– Sự biến thiên của hàm số :

+ Chiều biến thiên : $y' = \dfrac{-14}{(2x-3)^2}$; y' không xác định khi $x = \dfrac{3}{2}$; y' luôn luôn âm với mọi $x \neq \dfrac{3}{2}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; \dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$.

+ Cực trị

Hàm số đã cho không có cực trị.

+ Tiệm cận :

Ta có : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^-} \dfrac{4x+1}{2x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^+} \dfrac{4x+1}{2x-3} = +\infty$, nên đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x+1}{2x-3} = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x+1}{2x-3} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

+ Bảng biến thiên

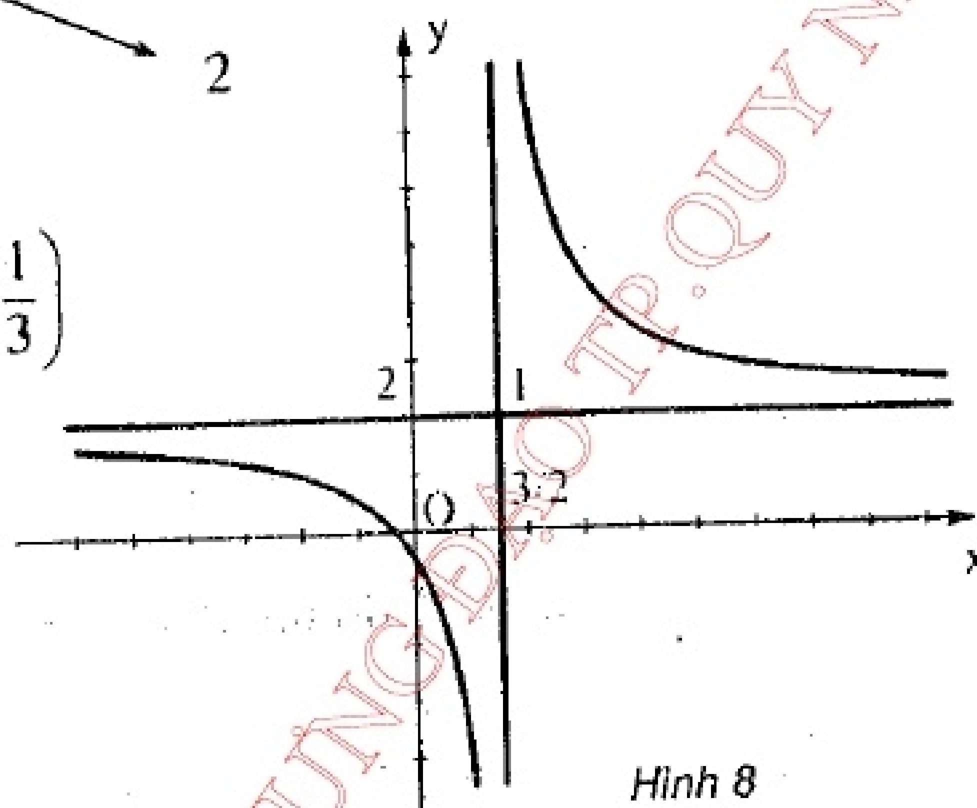
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

– Đồ thị (h.8)

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0\,;-\frac{1}{3}\right)$

cắt trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Chú ý. Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2};2\right)$, đồ thị có tâm đối xứng là điểm I.



Hình 8

3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ (Bạn đọc tự làm).

– Đồ thị (h.9) :

* Giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ :

Giao điểm với trục tung là điểm (0 ; 0).

Giao điểm với trục hoành là (0 ; 0), và (–3; 0).

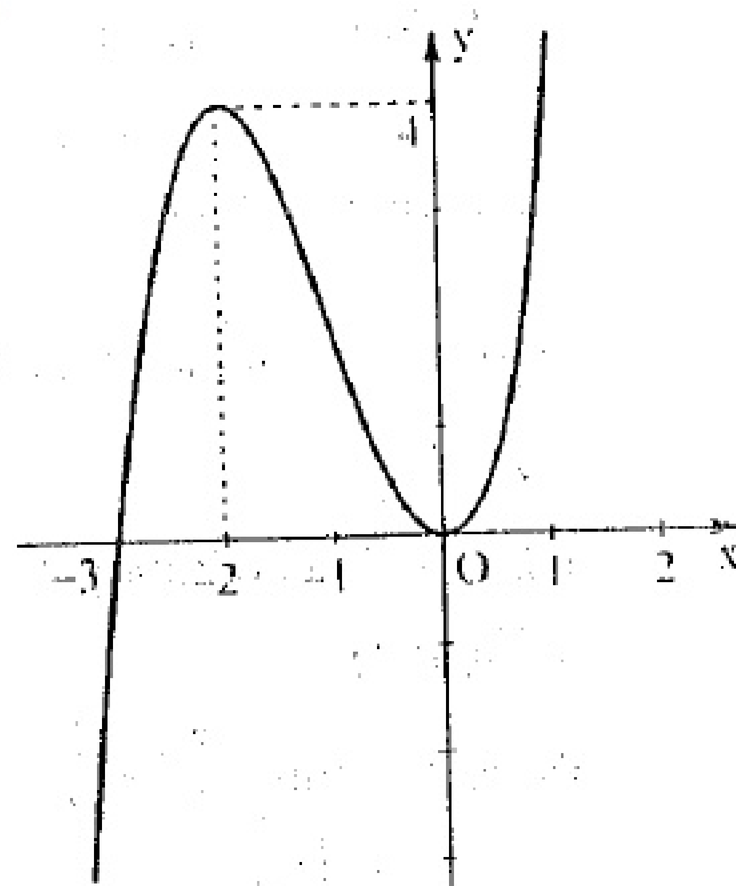
b) Số nghiệm của phương trình

$x^3 + 3x^2 + m = 0$,

tức phương trình $x^3 + 3x^2 = -m$ (*), là số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đường thẳng $y = -m$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận

+ Với $-m < 0$ hoặc $-m > 4$, tức là $m > 0$ hoặc $m < -4$: Phương trình (*) có 1 nghiệm.



Hình 9

+ Với $-m = 0$ hoặc $-m = 4$, tức là $m = 0$ hoặc $m = -4$: Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

+ Với $0 < -m < 4$, tức là $-4 < m < 0$: Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

LTĐH-TOÁN-LÝ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. a)

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

Vì $2(-x)^4 - 4(-x)^2 = 2x^4 - 4x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

– Sự biến thiên của hàm số:

Ta có: $y' = 8x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$; đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

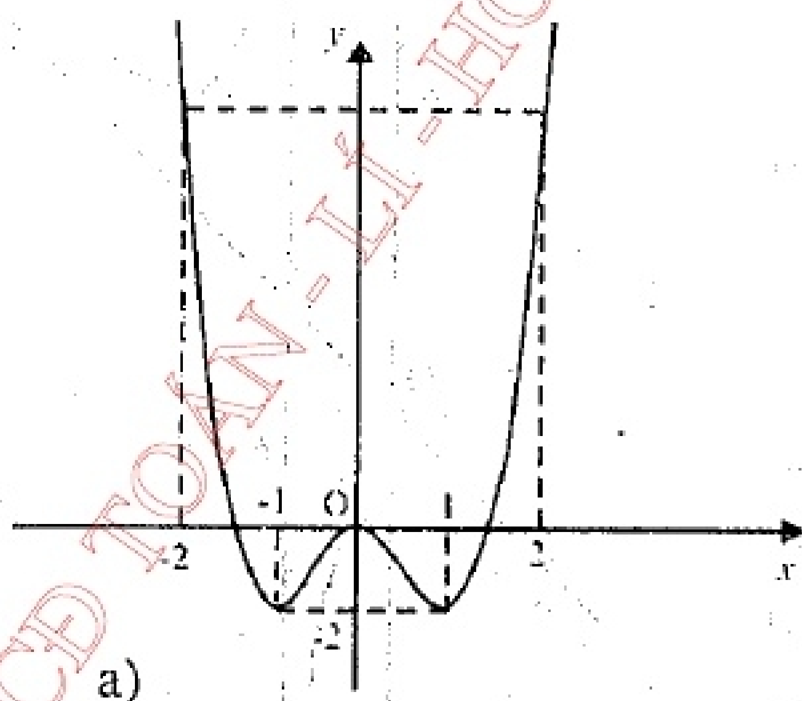
Cực trị : Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = -2$; hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$.

Giới hạn : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

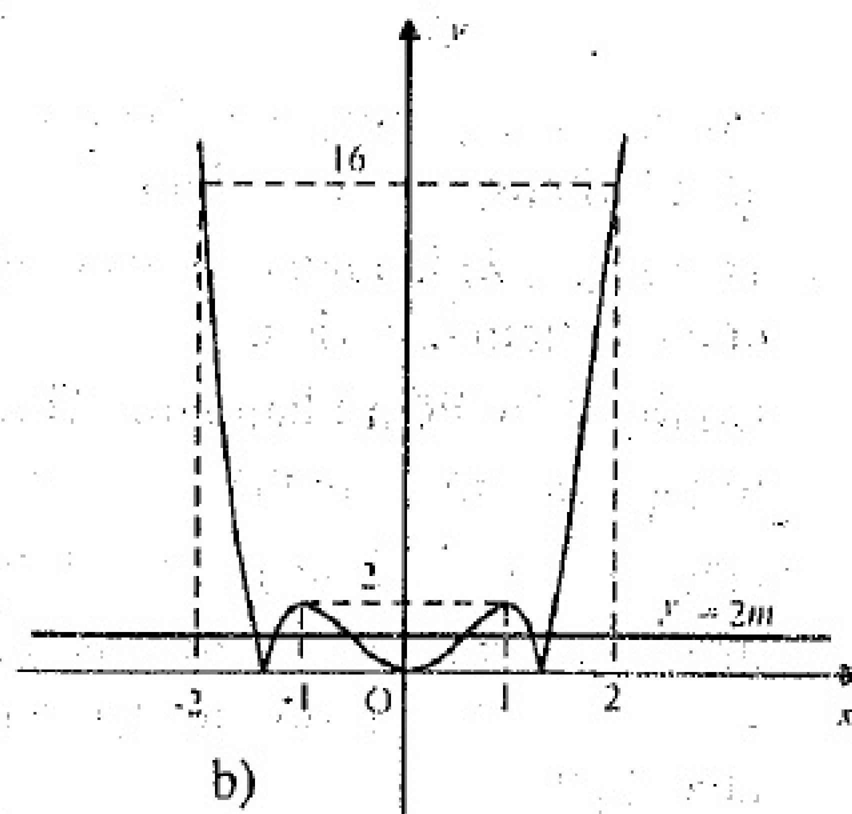
– Đồ thị : Hình 10a

b) Biện luận theo m : $x^2\left|x^2 - 2\right| = m \Leftrightarrow \left|2x^4 - 4x^2\right| = 2m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng y = 2m và đồ thị hàm số $y = \left|2x^4 - 4x^2\right|$ (h.10b).



a)



b)

Hình 10

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Dựa vào đồ thị, ta có:

m < 0: Phương trình vô nghiệm,

m = 0: Phương trình có 3 nghiệm phân biệt (1 nghiệm kép x = 0 và 2 nghiệm đơn $x = \pm\sqrt{2}$),

$0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: Phương trình có 6 nghiệm phân biệt,

$2m = 2 \Leftrightarrow m = 1$: Phương trình có 4 nghiệm phân biệt,

m > 1: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

5. a) Từ hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{b} = -2 \\ \dfrac{4a+20}{4+b} = 6 \end{cases}$ ta tìm được a = −2, b = −2.

Hàm số cần khảo sát và vẽ đồ thị là $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$. (1)

– TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

+ Tiệm cận đứng : x = 2

+ Tiệm cận xiên: y = x.

– Bảng biến thiên : $y' = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc x = 4.

x	−∞		0		2		4		+∞
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	−∞	↗	−2	↘ −∞	‖	+∞ ↘	6	↗	+∞

– Đồ thị (h.11).

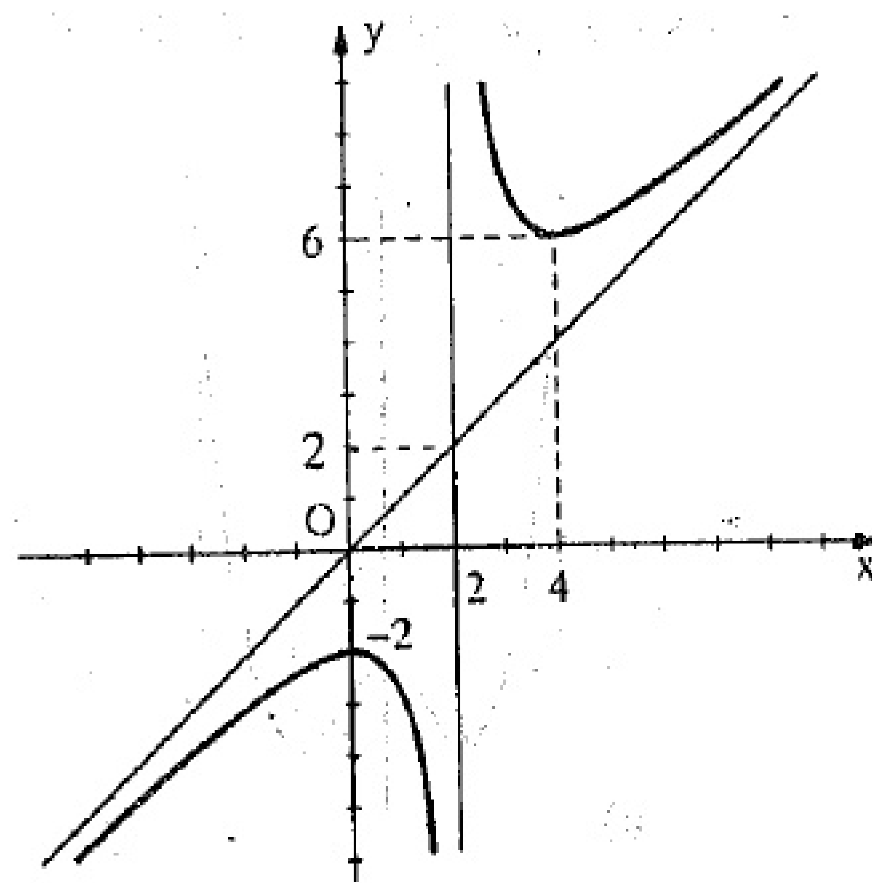
Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0 ; −2) ; đồ thị không cắt trục hoành.

Ta có I(2 ; 2) là giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên.

Đồ thị nhận điểm I làm tâm đối xứng.

b) Dựa vào đồ thị ta thấy :

Nếu m + 1 < −2 hoặc m + 1 > 6, tức m < −3 hoặc m > 5 thì đường thẳng y = m + 1 cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt.



Hình 11

LTĐH-TOÁN-LÝ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. a) $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4;$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2/3		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị: (h.12)

b) Phương trình tiếp tuyến tại O (0; 0) là :

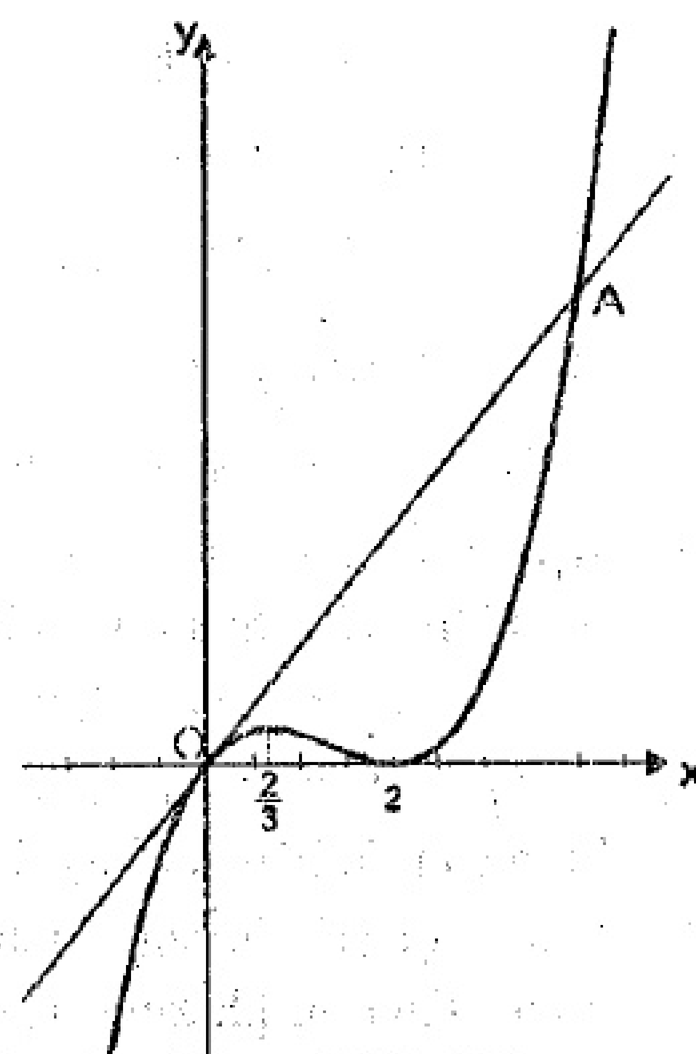
$y - 0 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 4x$ (d)

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$x^3 - 4x^2 + 4x = 4x$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$;

Do đó $x_A = 4 \Rightarrow y_A = 16$. Vậy A (4 ;16).



Hình 12

Chủ đề 2

HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên của số thực ; luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực của số thực dương (các khái niệm và các tính chất).

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2. Lôgarit cơ số a của một số dương ($a > 0$, $a \neq 1$). Các tính chất cơ bản của lôgarit. Lôgarit thập phân, ***số e*** và lôgarit tự nhiên.
3. Hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit (định nghĩa, tính chất, đạo hàm và đồ thị).
4. Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

Các dạng toán cần luyện tập :

1. Dùng các tính chất của luỹ thừa để đơn giản biểu thức, so sánh những biểu thức có chứa luỹ thừa

$$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}};\ a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta};\ \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta};\ \left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta};\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(với điều kiện các biểu thức đều có nghĩa).

2. Dùng định nghĩa để tính một số biểu thức chứa lôgarit đơn giản; áp dụng các tính chất của lôgarit vào các bài tập biến đổi, tính toán các biểu thức chứa lôgarit

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b;$$
$$\log_a(x_1.x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$
$$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\lg x}{\lg a};$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$
$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b.$$

(với điều kiện các biểu thức đều có nghĩa).

3. Áp dụng tính chất của các hàm số mũ, hàm số lôgarit vào việc so sánh hai số, hai biểu thức chứa mũ và lôgarit.
4. Vẽ đồ thị các hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit.
5. Tính đạo hàm các hàm số $y = e^x$, $y = \ln x$. Tính đạo hàm các hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số hợp của chúng.
6. Giải một số phương trình, bất phương trình mũ đơn giản bằng các phương pháp: Đưa về phương trình dạng cơ bản; phương pháp đưa về luỹ thừa cùng cơ số; phương pháp lấy lôgarit hai vế; phương pháp đặt ẩn phụ (chú ý điều kiện của ẩn phụ).

Với $b > 0$, $0 < a \neq 1$ ta có :

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b\ ;\quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Bất phương trình mũ: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \text{ khi } a > 1 \\ f(x) < g(x) \text{ khi } 0 < a < 1 \end{array}\right.$

LTĐH-CĐ TOÁN - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$a^{f(x)} > b \quad (b > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) > \log_a b & \text{khi } a > 1 \\ f(x) < \log_a b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

7. Giải một số phương trình, bất phương trình lôgarit đơn giản bằng các phương pháp: phương pháp đưa về lôgarit cùng cơ số; phương pháp mũ hoá; phương pháp dùng ẩn số phụ (đặt ẩn phụ để giải phương trình bậc hai; đặt ẩn phụ để giải phương trình mũ); đưa về dạng tích bằng 0.

Với $0 < a \neq 1$ ta có :

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Bất phương trình lôgarit:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) > a^b & \text{khi } a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 0 < f(x) < a^b & \text{khi } a > 1 \\ f(x) > a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) > g(x) > 0 & \text{khi } a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) & \text{khi } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) > 1 & \text{khi } a > 1 \\ 0 < f(x) < 1 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

§1. Các phép tính luỹ thừa

1. Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{-\frac{5}{2}} = 40$.

2. Rút gọn biểu thức với $a \neq 0, b \neq 0$:

a) $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^{-3}$; b) $(a^2 + b^2)\left(a^{-2} + b^{-2}\right)^{-1}$.

3. Rút gọn biểu thức $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$ (với $a > 0$).

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$.

5. Cho $x = 1 + 2^{a}$ và $y = 1 + 2^{-a}$. Hãy rút gọn biểu thức $\frac{y}{x}$.

6. Rút gọn biểu thức : $\left(2x + \frac{y}{2}\right)^{-1}\left[(2x)^{-1} + \left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]$.

7. Đơn giản biểu thức : a) $\frac{2n^{\frac{1}{3}}(3n^{\frac{1}{3}} - 4n^{\frac{4}{3}})}{2n^{-\frac{1}{3}}}$; b) $\frac{(\sqrt[3]{4a})^2}{\sqrt[6]{4a}}$.

8. Tìm x thoả mãn : a) $27^{1-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2-x}$; b) $(8 + x)^{-3} = 64$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. Ta có : $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}} = 16^{0,75} + 4^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{3}{4}} + 4^{\frac{5}{2}} = (\sqrt[4]{16})^3 + (\sqrt{4})^5 = 40.$

2. Với $a \neq 0, b \neq 0$

a) $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{-2}.\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-3} = \frac{(b^2)^{-2}}{a^{-2}}.\frac{(a^2)^{-3}}{b^{-3}} = \frac{b^{-4}a^{-6}}{a^{-2}b^{-3}} = \frac{1}{a^4 b}.$

b) $(a^{-2} + b^{-2})^{-1} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} = \left(\frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}\right)^{-1} = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2}$;

Do đó $(a^2 + b^2)(a^{-2} + b^{-2})^{-1} = a^2 b^2$.

3. Ta có : $\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = \frac{a + a^2}{a + 1} = a$ (do $a > 0$).

4. Thật vậy : Vì $0 < \frac{1}{3} < 1$ nên ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$ nếu chứng minh được

TTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$. Đây là bất đẳng thức đúng, vì :

$18 < 20 \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$.

5. Ta có : $y = 1 + \dfrac{1}{2^a} = \dfrac{2^a + 1}{2^a}$. Vậy $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2^a}$.

6. $\left(2x + \dfrac{y}{2}\right)^{-1}\left[(2x)^{-1} + \left(\dfrac{y}{2}\right)^{-1}\right] = \dfrac{2}{4x+y}\left[\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2}{y}\right] = \dfrac{2.(y+4x)}{(4x+y).2xy} = \dfrac{1}{xy}$.

7. a) $\dfrac{2n^{\frac{1}{3}}(3n^{\frac{1}{3}} - 4n^{\frac{4}{3}})}{2n^{-\frac{1}{3}}} = n^{\frac{2}{3}}(3n^{\frac{1}{3}} - 4n^{\frac{4}{3}}) = 3n - 4n^2$.

b) $\dfrac{(\sqrt[3]{4a})^2}{\sqrt[6]{4a}} = \dfrac{((4a)^{\frac{1}{3}})^2}{(4a)^{\frac{1}{6}}} = (4a)^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = (4a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$.

8. Ta có

a) $27^{1-x} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 3^{3(1-x)} = 3^{-2(2-x)} \Leftrightarrow 3(1-x) = -2(2-x) \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{5}$.

b) $(8+x)^{-3} = 64 \Leftrightarrow (8+x)^{-3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow 8 + x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{31}{4}$.

§2. Các phép tính lôgarit

1. Chứng tỏ rằng :

a) $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

b) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2 = \dfrac{2}{3}$.

2. Biểu diễn $\log_{30} 8$ qua $\log_{30} 5$ và $\log_{30} 3$.

3. So sánh các cặp số : a) $\log_3 5$ và $\log_7 4$; b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_5 3$.

4. Tìm x biết $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$.

5. Rút gọn biểu thức (viết dưới dạng số thực hoặc chỉ chứa một dấu lôgarit trong biểu thức)

a) $\log 45 - 2\log 3$;

b) $\dfrac{1}{2}\ln 25 - \ln 2$;

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

c) $\log_2 48 - \frac{1}{3}\log_2 27$;

d) $\log 4 - \log 3 + \log \pi + 3\log r$;

e) $\log_{25} 8.\log_8 5$;

f) $\frac{1}{\log_a(ab)} + \frac{1}{\log_b(ab)}$;

g) $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$;

h) $\frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6}$.

6. Biểu diễn trực tiếp y theo x, nếu :

a) $\ln y = \frac{1}{3}\ln x + \ln 4$;

b) $\log y + \frac{1}{2}\log x = \log 3$.

7. Tính : a) $\log_a\left(\frac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)$;

b) $\log_5 \log_5 \underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}}_{\text{n dấu căn}}$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2} = 3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 \frac{1}{27}}} = 3^{\frac{\log_3 2}{-3}} = 3^{\log_3 2^{-\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

b) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2 = (\log_3 6.\log_6 2).\log_8 9$

$= \log_3 2.\frac{\log_3 9}{\log_3 8} = \log_3 2.\frac{2}{3.\log_3 2} = \frac{2}{3}$.

2. Ta có :

$\log_{30} 8 = \frac{\log_{15} 8}{\log_{15} 30} = 3.\log_{15} 2.\log_{30} 15 = 3.(\log_{15} 30 - \log_{15} 15).\log_{30} 15$

$= 3.(1 - \log_{30} 15) = 3 - 3(\log_{30} 5 + \log_{30} 3)$.

3. a) $\log_3 5 > \log_3 3 = 1 = \log_7 7 > \log_7 4 \Rightarrow \log_3 5 > \log_7 4$.

b) Vì : $\log_{0,3} 2 < 0$; $\log_5 3 > 0$, nên $\log_{0,3} 2 < \log_5 3$.

4. Ta có

$\log_2\left(\log_3\left(\log_4 x\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) = 2^0 \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) = 1$

$\Leftrightarrow \log_4 x = 3^1 \Leftrightarrow x = 4^3 \Leftrightarrow x = 64$.

5. a) $\log 45 - 2\log 3 = \log(45 : 9) = \log 5$.

LTĐHCĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

b) $\frac{1}{2}\ln 25 - \ln 2 = \ln\frac{\sqrt{25}}{2} = \ln\frac{5}{2}$.

c) $\log_2 48 - \frac{1}{3}\log_2 27 = \log_2\frac{48}{\sqrt[3]{27}} = \log_2 16 = 4$.

d) $\log 4 - \log 3 + \log\pi + 3\log r = \log\frac{4\pi r^3}{3}$.

e) $\log_{25} 8.\log_8 5 = \log_{25} 5 = \frac{1}{\log_5 25} = \frac{1}{2}$.

f) $\frac{1}{\log_a(ab)} + \frac{1}{\log_b(ab)} = \log_{ab} a + \log_{ab} b = \log_{ab}(ab) = 1$.

g) Theo câu f, ta có $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = 1$.

h) Theo câu f, ta có $\frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6} = \frac{2}{\log_2 6} + \frac{2}{\log_3 6} = 2$.

6. a) $\ln y = \frac{1}{3}\ln x + \ln 4 \Leftrightarrow \ln y = \ln 4x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow y = 4x^{\frac{1}{3}}$;

b) $\log y + \frac{1}{2}\log x = \log 3 \Leftrightarrow \log y = -\frac{1}{2}\log x + \log 3$

$$\Leftrightarrow \log y = \log 3x^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

7. a) $\log_a\left(\frac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right) = \log_a\left(a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}\right) - \log_a\sqrt[4]{a} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{173}{60}$.

b) $\log_5\log_5\underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}}_{n} = \log_5\left(\frac{1}{5}\log_5\underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}_{n-1}\right)$

$$= \log_5\left(\underbrace{\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}\ldots\frac{1}{5}}_{n}.\log_5 5\right) = \log_5 5^{-n}.1 = -n.$$

§3. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x$;

b) $y = 5x^2 - \ln x + 8\cos x$;

c) $y = \dfrac{\log_3 x}{x} + \log(x^2 + x + 1)$.

d) $\sqrt{x^2+1}.\ln x$

3. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = e^{\cos 2x}$;

b) $y = x + \ln|\sin x + \cos x|$.

4. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)e^{2x}$;

b) $y = \ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. *Đáp số:* $[4-\sqrt{2};3)\cup[4+\sqrt{2};+\infty)$.

2. a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x \Rightarrow y' = 2e^x + 2xe^x + 6\cos 2x$.

b) $y = 5x^2 - \ln x + 8\cos x \Rightarrow y' = 10x - \dfrac{1}{x} - 8\sin x$.

c) + Tính đạo hàm của $y_1 = \dfrac{\log_3 x}{x}$;

áp dụng các công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ và $\log_a b.\log_b c = \log_a c$, ta có

$$y_1' = \dfrac{\dfrac{1}{x\ln 3}.x - \log_3 x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln 3.\log_3 x}{x^2\ln 3} \Rightarrow y_1' = \dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 3}.$$

+ Tính đạo hàm của $y_2 = \log(x^2 + x + 1)$; thấy $(x^2 + x + 1) > 0$ với mọi x,

nên áp dụng công thức $(\log_a|u|)' = \dfrac{u'}{u\ln a} \Rightarrow y_2' = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$.

+ Vậy có $y' = y_1' + y_2' = \dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 3} + \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$.

d) Để tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2+1}.\ln x$, áp dụng công thức $(u.v)' = u'v + uv'$

$$y' = (\sqrt{x^2+1}.\ln x)' = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}.\ln x + \sqrt{x^2+1}.\dfrac{1}{x}$$

$$= \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \dfrac{x^2.\ln x + x^2 + 1}{x\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2(\ln x + 1) + 1}{x\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2\ln ex + 1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. a) $y = e^{\cos 2x} \Rightarrow y' = (\cos 2x)' e^{\cos 2x} = -2\sin 2x.e^{\cos 2x}$.

b) $y = x + \ln|\sin x + \cos x|$

$$\Rightarrow y' = 1 + \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} = 1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

4. a) $y' = \left(\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}\right)' = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)2e^{2x} = x.e^{2x}$.

b) $$y' = \left(\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right)' = \frac{\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)'}{\frac{e^x}{1+e^x}} = \frac{(e^x)'(1+e^x) - e^x(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}.\frac{1+e^x}{e^x}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2}.\frac{1+e^x}{e^x} = \frac{1}{1+e^x}.$$

§4. Phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit

1. Giải phương trình $\left(\frac{7}{11}\right)^{2x-3} = \left(\frac{11}{7}\right)^{3x-7}$.

2. Giải phương trình $2.16^x - 17.4^x + 8 = 0$.

3. Giải phương trình $5^x + 12^x = 13^x$.

4. Giải các phương trình

a) $\frac{\log_4(x+2)}{\log_2 x} = 1$; b) $\log_2(x-3) + 2\log_4 3.\log_3 x = 2$.

5. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ 4y^2 + x - 12 = 0 \end{cases}$.

6. Giải bất phương trình $9^x - 5.3^x + 6 < 0$.

7. Giải bất phương trình $\log_{0,5}(4x + 11) < \log_{0,5}(x^2 + 6x + 8)$.

8. Giải bất phương trình $2^{-x^2} > 2^{-|x|}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

9. Cho bất phương trình $\frac{2^{x+1}-5.3^x}{2^x-3^{x+1}}<1$.

Số $\log\frac{1}{32}$ có phải là nghiệm của bất phương trình đã cho hay không ?

10. Giải bất phương trình $\frac{4-7.5^x}{5^{2x+1}-12.5^x+4}\le\frac{2}{3}$.

11. Giải bất phương trình $\log_3(x+2)>\log_9(x+2)$.

12. Giải bất phương trình $\log_2 x<1+\frac{1}{\log_2\sqrt{x}}$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. $\left(\frac{7}{11}\right)^{2x-3}=\left(\frac{11}{7}\right)^{3x-7}\Leftrightarrow\left(\frac{7}{11}\right)^{2x-3}=\left(\frac{7}{11}\right)^{-(3x-7)}$

$\Leftrightarrow 2x-3=-(3x-7)\Leftrightarrow 5x=10\Leftrightarrow x=2.$

2. Đặt $t=4^x$, điều kiện : $t>0$, ta có $2t^2-17t+8=0\Rightarrow t=8$ hoặc $t=\frac{1}{2}$.

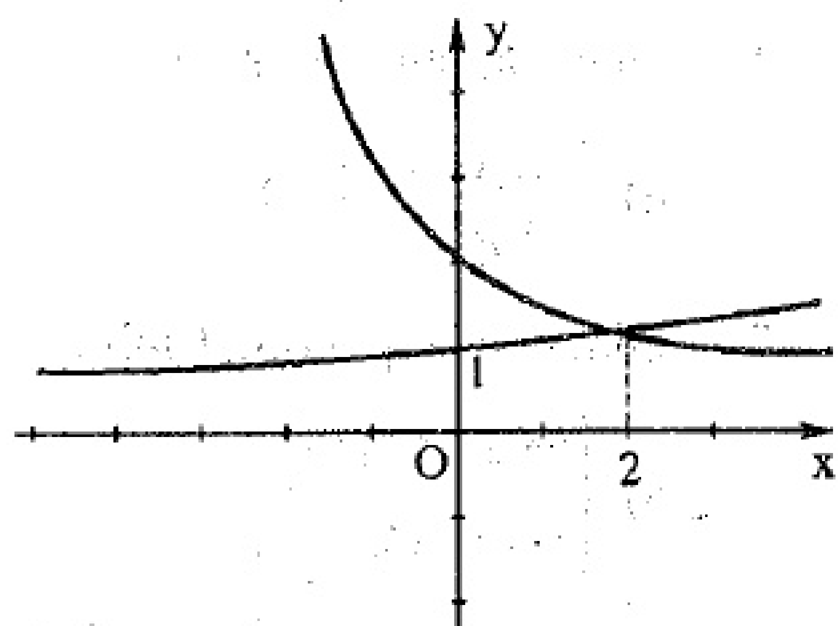
Đối chiếu điều kiện, hai giá trị của t tìm được đều thoả mãn, từ đó :

Với $t=8$ có $4^x=8\Rightarrow 2^{2x}=2^3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$;

Với $t=\frac{1}{2}$ có $4^x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{2x}=2^{-1}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

3. Do $12^x>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, nên có phương trình tương đương $\left(\frac{5}{12}\right)^x+1=\left(\frac{13}{12}\right)^x$.

Do $y=\left(\frac{5}{12}\right)^x+1$ là hàm nghịch biến, còn $y=\left(\frac{13}{12}\right)^x$ là hàm đồng biến nên nếu phương trình có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Dễ thấy $x=2$ là nghiệm, vì $5^2+12^2=169=13^2$.



Hình 13

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$ (h.13).

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. a) Điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

Ta có : $\log_4(x+2) = \dfrac{\log_2(x+2)}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2(x+2)}{2} = \log_2(x+2)^{\frac{1}{2}}$,

do đó $\log_2(x+2)^{\frac{1}{2}} = \log_2 x \Rightarrow (x+2)^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2, x = -1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 2$.

b) Điều kiện: $x > 3$. Ta có $\log_2(x-3) + 2\log_4 3.\log_3 x = 2(*)$

Do $\log_4 3.\log_3 x = \log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{2}$ nên

(*) $\Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-3)x = 2 \Leftrightarrow (x-3)x = 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = -1$ (loại vì điều kiện $x > 3$). Vậy $x = 4$.

5. a) Do $y = x - 2$ nên ta có

$3^x + 3^{x-2} = 5 \Leftrightarrow 3^x(1 + 3^{-2}) = 5 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 9 - \log_3 2$

$\Leftrightarrow x = 2 - \log_3 2$, từ đó tìm được $y = -\log_3 2$.

Vậy hệ có nghiệm $(x ; y) = (2 - \log_3 2 ; -\log_3 2)$.

b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ 4y^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y (x > 0,\ y > 0) \\ 4y^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y (x > 0,\ y > 0) \\ 2y^2 + y - 6 = 0. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x ; y) = \left(3 ; \dfrac{3}{2}\right)$.

6. Đặt $t = 3^x$, điều kiện : $t > 0$. Ta có $t^2 - 5t + 6 < 0$; nghiệm của bất phương trình là $2 < t < 3$. Từ đó $2 < 3^x < 3 \Leftrightarrow \log_3 2 < x < \log_3 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $\log_3 2 < x < 1$.

7. Với điều kiện $\begin{cases} 4x + 11 > 0 \\ x^2 + 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{11}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$

và do tính chất của hàm lôgarit với cơ số nhỏ hơn 1 là hàm số nghịch biến, ta có $\log_{0,5}(4x + 11) < \log_{0,5}(x^2 + 6x + 8) \Rightarrow 4x + 11 > x^2 + 6x + 8$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow -3 < x < 1$.

Kết hợp với điều kiện nêu trên, bất phương trình có tập nghiệm là $(-2 ; 1)$.

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

8. $2^{-x^2} > 2^{-|x|} \Leftrightarrow -x^2 > -|x| \Leftrightarrow x^2 - |x| < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ -1 < x < 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-1;0) \cup (0;1)$.

9. $\dfrac{2^{x+1} - 5.3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2^x - 2.3^x}{2^x - 3.3^x} < 0 \Leftrightarrow (2^x - 2.3^x)(2^x - 3.3^x) < 0$

$\Leftrightarrow \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 2\right)\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 3\right) < 0 \Leftrightarrow 2 < \left(\dfrac{2}{3}\right)^x < 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}} 3 < x < \log_{\frac{2}{3}} 2.$

Ta có $\log_{\frac{2}{3}} 2 < \log\dfrac{1}{32} \Leftrightarrow \dfrac{\log 2}{\log\dfrac{2}{3}} < -5\log 2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{5} < \log\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 10^{-\frac{1}{5}} < \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{10} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{10} < \dfrac{32}{243} \Leftrightarrow 243 < 320$, đây là bất đẳng thức đúng, suy ra số $\log\dfrac{1}{32}$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

Lưu ý : Nếu dùng máy tính cầm tay ta thấy $\log_{\frac{2}{3}} 2 = \dfrac{\log 2}{\log\dfrac{2}{3}} \approx -1,7095$;

$\log\dfrac{1}{32} = -5\log 2 \approx -1,5051$, vậy $\log_{\frac{2}{3}} 2 < \log\dfrac{1}{32}$; nghĩa là số $\log\dfrac{1}{32}$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

10. *Hướng dẫn* : Biến đổi $\dfrac{4 - 7.5^x}{5^{2x+1} - 12.5^x + 4} \le \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4 + 3.5^x - 10.5^{2x}}{5.5^{2x} - 12.5^x + 4} \le 0$ rồi đặt $y = 5^x > 0$.

Đáp số : Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$(\log_5 0,4; \log_5 0,8] \cup (\log_5 2; +\infty)$.

LTĐH-CĐ-TOÁN - LÍ - HÓA 2000 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

11. Điều kiện : $x > -2$, có $\log_9(x+2) = \dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3(x+2)}{2}$, do đó có

$$\log_3(x+2) > \frac{1}{2}.\log_3(x+2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\log_3(x+2) > 0 \Leftrightarrow x+2 > 1 \Leftrightarrow x > -1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > -1$.

12. *Hướng dẫn :* Điều kiện : $x > 0$, $x \neq 1$. Ta có

$$\log_2 x < 1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x}} \Leftrightarrow \log_2 x < 1 + \frac{2}{\log_2 x}.$$

Đặt $y = \log_2 x$.

Đáp số : Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right) \cup (1\,;4)$.

Chủ đề 3

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm. Bảng nguyên hàm của một số hàm số tương đối đơn giản. Phương pháp đổi biến số, tính nguyên hàm từng phần.
2. Định nghĩa và các tính chất của tích phân. Tính tích phân của hàm số liên tục bằng công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit. Phương pháp tích phân từng phần và phương pháp đổi biến số để tính tích phân.
3. Diện tích hình thang cong. Các công thức tính diện tích, thể tích nhờ tích phân.

Các dạng toán cần luyện tập :

1. Tìm (họ hoặc một) nguyên hàm nhờ phép tính đạo hàm, nhờ công thức, nhờ phép đổi biến số và nhờ phép tính nguyên hàm từng phần.
2. Tính tích phân bằng công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit.
3. Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần.

– Dạng: $\int_a^b P(x)\sin x dx$, $\int_a^b P(x)\cos x dx$, $\int_a^b P(x)\, e^x dx$ ($P(x)$ là đa thức của x).

Đặt $u = P(x)$, tương ứng $dv = \sin x dx$, $dv = \cos x dx$, $dv = e^x dx$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

– Dạng: $\int_a^b \frac{x}{\cos^2 x}dx, \int_a^b \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Đặt $u = x, dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ hoặc $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$.

4. Sử dụng phương pháp đổi biến số (khi đã chỉ rõ cách đổi biến số và không đổi biến số quá một lần) để tính tích phân.

– Dạng: $\int_0^a f(a-x)dx$ trong đó f(x) là hàm số liên tục trên [0; a], đổi biến $x = a - t$.

– Dạng: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$. Đặt $t = u(x)$, $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

– Dạng: $\int_a^b e^x \sin x dx$, $\int_a^b e^x \cos x dx$. Đặt $u = \sin x$ ($u = \cos x$), $dv = e^x dx$.

– Dạng: $\int_a^b \sin(\ln x)dx$, $\int_a^b \cos(\ln x)dx$. Đặt $u = \sin(\ln x)$ ($u = \cos(\ln x)$), $dv = dx$.

5. Tính diện tích một số hình phẳng, thể tích một số khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng khi quay xung quanh trục hoành.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị : Cho hai hàm số y = f(x) và y = g(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$, có đồ thị (C_1), (C_2). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1), (C_2) và hai đường thẳng x = a, x = b được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ (nếu hình phẳng không giới hạn bởi các đường thẳng x = a, x = b thì ta phải giải phương trình f(x)= g(x) để tìm ...

Thể tích khối tròn xoay : Cho hàm số y = f(x) liên tục trên đ... vật thể do hình phẳng giới hạn bởi (C): {y = f(x), y = 0, x = a, x = b} quay ...ng quanh Ox được tính bởi công thức: $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN TỪNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

§1. Nguyên hàm

Hãy tìm các họ nguyên hàm sau đây :

1. $\int(2x^2-3x+5)dx$;

2. $\int x^2(5-x)^4dx$;

3. $\int\frac{x^3}{x+2}dx$;

4. $\int x\sin 2x\,dx$;

5. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$;

6. $\int\left(3\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$;

7. $\int(e^{2x}+5)^3e^{2x}dx$;

8. $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$;

9. $\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$

(*Hướng dẫn* : Đặt $u = 3x + 1$) ;

10. $\int\frac{1}{x^2-3x+2}dx$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. $\int(2x^2-3x+5)dx = \int 2x^2dx + \int(-3x)dx + \int 5dx$

$$= 2\int x^2dx - 3\int xdx + 5\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + C.$$

2. Ta có $x^2(5-x)^4 = x^6 - 20x^5 + 150x^4 - 500x^3 + 625x^2$. Suy ra họ các nguyên hàm cần tìm là $\frac{x^7}{7} - \frac{10}{3}x^6 + 30x^5 - 125x^4 + \frac{625}{3}x^3 + C.$

3. $\int\frac{x^3}{x+2}dx = \int\frac{(x^3+8)-8}{x+2}dx = \int\frac{x^3+8}{x+2}dx - \int\frac{8}{x+2}dx$

$$= \int(x^2-2x+4)dx - 8\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\ln|x+2| + C.$$

4. Áp dụng công thức $\int udv = uv - \int vdu$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$, ta có

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{x}{2}.\cos 2x - \int(-\frac{1}{2}\cos 2x)dx = -\frac{x}{2}.\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

5. *Hướng dẫn :* Dùng công thức hạ bậc.

Đáp số : $\frac{x - \sin x}{2} + C$.

6. $\int\left(3\sin x - \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx = 3\int \sin x dx - 2\int\frac{dx}{\cos^2 x} = -3\cos x - 2\tan x + C.$

7. $\int(e^{2x} + 5)^3 e^{2x}dx = \int(e^{2x} + 5)^3 . \frac{1}{2}d(e^{2x} + 5)$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(e^{2x} + 5)^4 + C = \frac{(e^{2x} + 5)^4}{8} + C.$

8. $\int\frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int\frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + C.$

9. Ta thực hiện phép đổi biến $u = 3x + 1 \Rightarrow du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$, có

$\int\frac{1}{\sqrt{3x + 1}}dx = \frac{2}{3}\int\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x + 1} + C.$

10. Ta có $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$.

Suy ra họ các nguyên hàm cần tìm là $\ln|x - 2| - \ln|x - 1| + C = \ln\left|\frac{x - 2}{x - 1}\right| + C$.

§2. Tích phân

Hãy tính các tích phân sau đây :

1. $\int_0^1 (2x + 1)^3 dx$;

2. $\int_1^2 \sqrt{x + 2}\, dx$

(*HD* : Đặt $u = x + 2$) ;

3. $\int_0^1 x(x - 1)^{2011} dx$

(*HD* : Đổi biến $x - 1 = t$) ;

4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx$

(*HD* : Đổi biến $x = \frac{1}{3}t$) ;

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$;

6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x\, dx$;

7. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^2 - 2x}{x^3} dx$;

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(x-2)(x+3)} dx$;

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

(*HD* : Đặt $u = x^2 + x + 1$) ;

10. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$;

11. $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$;

12. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}$;

13. $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2} dx$ (*HD* : Đổi biến $x = 2\sin t$ $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$) ;

14. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ (*HD* : Đổi biến $x = \tan t$ $\left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$) ;

15. $\displaystyle\int_{1}^{2} x^2 \ln x dx$;

16. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

17. $\displaystyle\int_{0}^{3} x e^{-x^2} dx$;

18. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{e^x dx}{2+e^x}$;

19. $\displaystyle I = \int_{-2}^{2} |x-1| dx$;

20. $\displaystyle\int_{0}^{2} |x^2 - 1| dx$;

21. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+3)e^x dx$;

22. $\displaystyle\int_{1}^{2} (2x-1)\ln x dx$;

23. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 \sqrt[8]{1-x}\, dx$ (*HD* : Đổi biến $1 - x = t$) ;

24. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1+4\sin 3x} \cos 3x dx$ (*HD* : Đổi biến $1 + 4\sin 3x = t$).

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

25. Chứng minh rằng : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

(*HD* : Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$).

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+1)^3 d(2x+1) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}(81-1) = 10.$

2. Đặt $u = x + 2$ ta có $du = dx$; khi $x = 1$ thì $u = 3$, khi $x = 2$ thì $u = 4$. Vậy

$$\int_1^2 \sqrt{x+2}dx = \int_3^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4 = \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{3^3}) = \frac{16-6\sqrt{3}}{3} \approx 1,8692.$$

3. Đặt $x - 1 = t$ suy ra $x = 1 + t$; $dx = dt$, khi $x = 0$ thì $t = -1$, $x = 1$ thì $t = 0$.

$$\int_0^1 x(x-1)^{2011}dx = \int_{-1}^0 (t+1)t^{2011}dt = \int_{-1}^0 (t^{2012} + t^{2011})dt = \left(\frac{t^{2013}}{2013} + \frac{t^{2012}}{2012}\right)\Bigg|_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{2013} - \frac{1}{2012} = \frac{-1}{2012.2013}.$$

4. Đặt $x = \frac{t}{3}$ ta có $dx = \frac{1}{3}dt$, khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$,

do đó $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t.\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt = \frac{1}{3}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$

5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 0.$

Nhận xét. Có thể thấy ngay kết quả trên nếu để ý hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin 7x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos 9x - \cos 5x}{2}dx$

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{9}\sin 9x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{5}\sin 5x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}+\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{45}.$$

7. $$\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \int_1^2\frac{dx}{x} - \int_1^2\frac{2}{x^2}dx = \ln x\Big|_1^2 - 2.\frac{-1}{x}\Big|_1^2$$

$$= \ln 2 - 1 = \ln\frac{2}{e} \approx -0{,}3069.$$

8. $$\int_{-1}^{1}\frac{2}{(x-2)(x+3)}dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{5(x-2)} - \frac{2}{5(x+3)}\right)dx = \frac{2}{5}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)} - \frac{2}{5}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x+3)}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\ln|x-2|\Big|_{-1}^{1} - \ln|x+3|\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{2}{5}(\ln 1 - \ln 3 - \ln 4 + \ln 2)$$

$$= \frac{2}{5}\ln\frac{1.2}{3.4} = \frac{2}{5}\ln\frac{1}{6} \approx -0{,}7167.$$

9. Đặt $u = x^2 + x + 1 \Rightarrow du = (2x+1)dx$, $x = -1 \Rightarrow u = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = 3$, do đó

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int_1^3\frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\int_1^3\frac{du}{2\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\Big|_1^3 = 2(\sqrt{3}-\sqrt{1}) \approx 1{,}4641.$$

10. $$\int_1^2\frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2(2x-1)^{-2}d(2x-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2x-1}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-(-1)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

11. $$\int_3^4\frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_3^4\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_3^4 = \ln\frac{4}{3}.$$

12. $$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{25-3x}} = \int_0^4\frac{d(25-3x)}{-3\sqrt{25-3x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{25-3x}\Big|_0^4 = -\frac{2}{3}(\sqrt{13}-5).$$

13. Đặt $x = 2\sin t$ $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Vậy với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, ta có $\cos t \ge 0$, nên

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2|\cos t| = 2\cos t$, $dx = 2\cos t dt$, do đó

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2000 - TRẦN HÙNG ĐẠO - QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{4}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Chú ý : Dễ thấy tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn bán kính 2, nên tích phân đó bằng $\frac{1}{4}\pi.2^2 = \pi$.

14. Đặt $x = \tan t \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Ta thấy x = 0 khi t = 0, x = 1 khi $t = \frac{\pi}{4}$;

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1+\tan^2 t)dt.$$

Do đó $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

15. Sử dụng công thức $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Do đó $$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}.\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Bigg|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Bigg|_1^2 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(24\ln 2 - 7).$$

16. $$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln 2.$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 0000 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

17. $\int_0^3 xe^{-x^2}dx = \int_0^3 \frac{e^{-x^2}d(-x^2)}{-2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^3 = \frac{1}{2}(1-e^{-9})$.

18. $\int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int_{-1}^2 \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x)\Big|_{-1}^2 = \ln\frac{2e+e^3}{2e+1}$.

19. $I = \int_{-2}^2 |x-1|dx$. Vì $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1-x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ nên :

$$I = \int_{-2}^2 |x-1|dx = \int_{-2}^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= \int_{-2}^1 dx - \int_{-2}^1 xdx + \int_1^2 xdx - \int_1^2 dx = (x)\Big|_{-2}^1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - (x)\Big|_1^2 = 5.$$

20. $\int_0^2 |x^2-1|dx = \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx = \left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2 = 2.$

21. Đặt $\begin{cases} u = x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Gọi tích phân cần tính là I, ta có

$$I = (x+3)e^x\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = (x+2)e^x\Big|_{-1}^1 = \frac{3e^2-1}{e}.$$

22. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-1).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x^2 - x \end{cases}$

$$\int_1^2 (2x-1)\ln x\, dx = (\ln x)(x^2-x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

23. *Hướng dẫn :* Đặt $1 - x = t$. *Đáp số :* $\frac{1024}{3825}$.

24. Đặt $1 + 4\sin 3x = t$ suy ra $12\cos 3x dx = dt$; khi $x = 0$ thì $t = 1$; khi $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = 5$. Gọi tích phân cần tính là I, ta có :

$$I = \int_1^5 \frac{\sqrt{t}}{6}dt = \frac{1}{6}\int_1^5 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{9}t\sqrt{t}\Big|_1^5 = \frac{1}{9}(5\sqrt{5}-1).$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HOÁ 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

25. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, khi $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Ta có $\quad dx = -dt, \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$

Do đó : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

§3. Ứng dụng của tích phân

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$.
2. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và parabol $y = x(4 - x)$ quay quanh trục hoành.
3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0 ; 2\pi]$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2\pi$.
4. Tính diện tích hình phẳng nằm giữa hai đường $f_1(x) = x^3 - 3x$ và $f_2(x) = x$.
5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

   a) $y = x^3$; $x + y = 2$ và trục hoành ;

   b) $y = 2x - x^2$; $x + y = 0$;

   c) $y = x$; $y = x + \sin^2 x$ $(0 \leq x \leq \pi)$.
6. Parabol có phương trình $y^2 = 2x$ chia hình tròn $x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần. Tính tỉ số diện tích hai phần đó.
7. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi quay quanh trục Ox.
8. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $x = 2$ và $y = 0$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay có được khi hình phẳng đó quay quanh trục Ox.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. Áp dụng công thức $S = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$.

   + Các cận a, b là nghiệm của phương trình $g(x) - f(x) = 0$ (h.14), ta có :

THPT CHUYÊN LÊ HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$2 - x^2 - (-x) = 0$

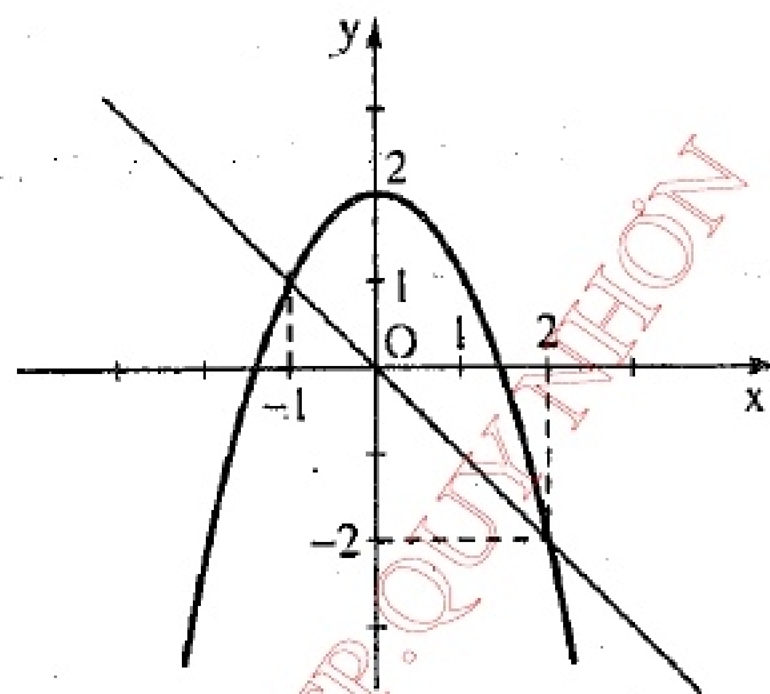
$\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$S = \int_{-1}^{2} \left|(2 - x^2) - (-x)\right| dx$

$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx$

$= -\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2}$

$= \left(-\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + (4 + 2) = \frac{9}{2}.$



Hình 14

2. Áp dụng công thức $V = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx$.

+ Các cận a, b là nghiệm của phương trình $y = f(x) = 0$ với $y = x(4 - x)$; tìm được $a = 0$, $b = 4$.

$V = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx = \pi \int_{0}^{4} (-x^2 + 4x)^2 dx$

$= \pi\left(\int_{0}^{4} x^4 dx - 8\int_{0}^{4} x^3 dx + 16\int_{0}^{4} x^2 dx\right)$

$= \pi\left(\frac{1}{5}x^5\Big|_{0}^{4} - \frac{8}{4}x^4\Big|_{0}^{4} + \frac{16}{3}x^3\Big|_{0}^{4}\right)$

$= \pi\left(\frac{4^5}{5} - \frac{8.4^4}{4} + \frac{16.4^3}{3}\right) = \frac{512\pi}{15}.$

3. Ta có $\cos x \geq 0$ khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ và $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, còn $\cos x \leq 0$ khi $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$,

do đó $S = \int_{0}^{2\pi} |\cos x| dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx$

LTĐH-CĐ TOÁN -LÍ- HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4.$$

4. Ta có : $f_1(x) - f_2(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0, x = 2.$

- Với $-2 \le x \le 0$ có $x^3 - 4x \ge 0$;
- Với $0 \le x \le 2$ có $x^3 - 4x \le 0$.

Vậy diện tích phải tìm là :

$$S = \int_{-2}^{2}\left|x^3 - 4x\right|dx = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2}(4x - x^3)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8.$$

5. a) Có $x^3 = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$. Toạ độ giao điểm của $y = x^3$ và $x + y = 2$ là A(1 ; 1).

(HS tự vẽ hình).

Đáp số : $S = \int_0^1 x^3dx + \int_1^2(-x + 2)dx = \frac{3}{4}.$

b) Có $2x - x^2 = -x \Leftrightarrow x = 0$; $x = 3$.

Diện tích là : $S = \int_0^3(3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$

c) Có $x + \sin^2x = x \Leftrightarrow \sin^2x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (1).

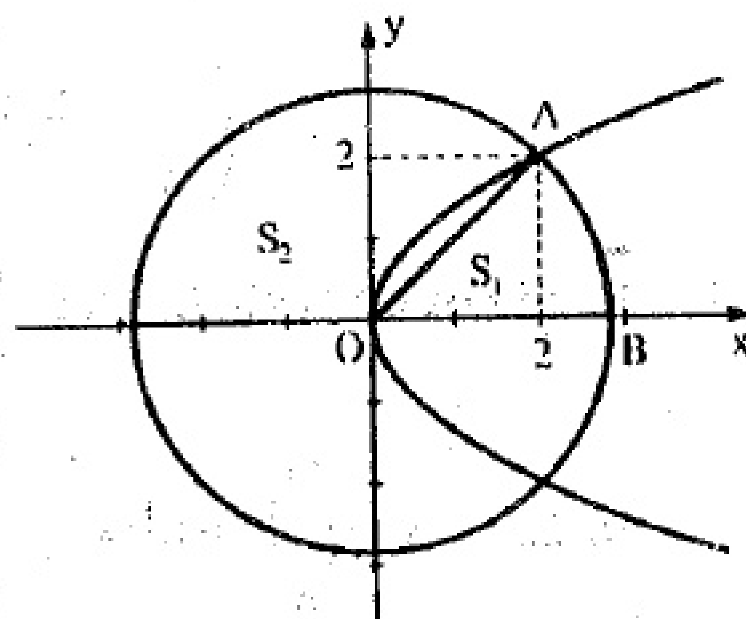
Trên $[0 ; \pi]$, (1) có nghiệm $x = 0$, $x = \pi$.

Vậy $S = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$

6. (h.15) Hình tròn $x^2 + y^2 = 8$ có $R = 2\sqrt{2}$, do đó có diện tích là $\pi R^2 = 8\pi$.

Ta cần tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$ trong đó :

$$S_1 = \int_0^2(\sqrt{2x} - x)dx + S_{\text{quạt tròn OAB}}$$



Hình 15

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}x\sqrt{2x} - x^2\right)\Bigg|_0^2 + S_{\text{quạt tròn OAB}} = \frac{2}{3} + \pi;$$

S_2 là diện tích nửa hình tròn còn lại thì

$$S_2 = 4\pi - \left(\frac{2}{3} + \pi\right) = 3\pi - \frac{2}{3}.$$

Vậy $$\frac{S_2}{S_1} = \frac{3\pi - \frac{2}{3}}{\pi + \frac{2}{3}} = \frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}.$$

7. Xét hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.
Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng đó khi quay quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

8. Cho $xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Thể tích cần tìm là

$$V = \pi\int_0^2 (xe^x)^2 dx = \pi\int_0^2 x^2e^{2x}dx.$$

Đặt $$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

$$V = \left(\pi\frac{x^2e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^2 - \pi\int_0^2 xe^{2x}dx = \left(\frac{\pi x^2e^{2x}}{2} - \pi\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{\pi e^{2x}}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{\pi e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1)\Bigg|_0^2 = \frac{\pi}{4}(5e^4 - 1).$$

Chủ đề 4
SỐ PHỨC

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Số phức. Dạng đại số của số phức. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức, số phức liên hợp.
2. Căn bậc hai của số thực âm. Giải phương trình bậc hai, quy về bậc hai với hệ số thực.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. ***Căn bậc hai của số phức. Công thức tính nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số phức.***
4. ***Acgumen và dạng lượng giác của số phức. Công thức Moa-vrơ và ứng dụng.***

Các dạng toán cần luyện tập :

1. Tìm lũy thừa nguyên của i. Tìm phần thực và phần ảo của số phức. Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia số phức ở dạng đại số. Tìm số phức nghịch đảo của $z = a + bi$. Tìm số phức liên hợp của một số phức. Tìm môđun của một số phức. Tìm biểu diễn hình học của một tập số phức. Giải phương trình bậc nhất hệ số phức. Tìm nghiệm phức của phương trình bậc hai với hệ số thực (nếu $\Delta < 0$).

   Hai số phức bằng nhau

   $$z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R}),\ z' = a' + b'i\ (a', b' \in \mathbb{R}),\ z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

   Biểu diễn hình học của số phức

   Số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trong mặt phẳng toạ độ Oxy hay còn gọi là mặt phẳng phức. Trục Ox biểu diễn các số thực gọi là trục thực, trục Oy biểu diễn các số ảo gọi là trục ảo.

   Số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ cũng được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u} = (a; b)$, do đó M(a; b) là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ thì vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng biểu diễn số phức đó, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\vec{u}\right| = |z|$.

   Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì $\vec{u} + \vec{v}$ biểu diễn số phức $z + z'$, $\vec{u} - \vec{v}$ biểu diễn số phức $z - z'$, $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz.
2. ***Biểu diễn được số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác và ngược lại ; Cách nhân, chia các số phức dưới dạng lượng giác.***
3. ***Tính căn bậc hai của số phức. Giải phương trình bậc hai với hệ số phức.***
4. ***Biểu diễn $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$,... qua $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.***

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

§1. Các phép tính số phức

1. Hãy thực hiện các phép tính :

a) $5 + 2i - 3(-7 + 6i)$;

b) $(2 - \sqrt{3}i)\left(\frac{i}{2} + \sqrt{\ }\right)$ [illegible] ;

LTĐHCĐ TOÁN - LÍ - HOÁ 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

c) $(1+\sqrt{2}\,i)^2$; d) $\dfrac{2-15i}{3+2i}$.

2. Xác định phần thực và phần ảo của các số phức sau đây :

a) $z = (0 - i) - (2 - 3i) + (7 + 8i)$; b) $z = (0 - i).(2 + 3i).(5 + 2i)$;

c) $z = \dfrac{6-i}{3+2i}$; d) $z = (7 - 3i)^2 - (2 - i)^2$.

3. Tìm các số thực x và y thoả mãn từng điều kiện :

a) $x + 2i = 5 + yi$; b) $(x + 1) + 3(y - 1)i = 5 - 6i$.

4. Cho số phức $z = 4 - 3i$. Tìm :

a) z^2 ; b) $\dfrac{1}{z}$; c) $\overline{z}$; d) $z + z^2 + z^3$.

5. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện :

a) $|z-i| = 2$; b) z^2 là số thuần ảo.

6. Trên mặt phẳng phức, hãy tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức thoả mãn từng điều kiện sau :

a) $|z - i| \le 1$; b) $|z + i| = |z + 2|$; c) phần thực của z bằng 3.

7. Xác định điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + iy$ sao cho: $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^2 = \dfrac{z+i}{z-i}$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) $5 + 2i - 3(-7 + 6i) = 26 - 16i$.

b) $(2-\sqrt{3}\,i)\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}i\right) = 1 + 2\sqrt{3}\,i - \dfrac{1}{2}.\sqrt{3}\,i + 3 = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

c) $(1+\sqrt{2}\,i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}\,i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}\,i$.

d) $\dfrac{2-15i}{3+2i} = \dfrac{(2-15i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{6-4i-45i-30}{9+4} = -\dfrac{24}{13} - \dfrac{49}{13}i$.

2. Gọi số phức là $z = a + bi$, cần tìm a = ? và b = ?.

a) Ta có $z = (0 - i) - (2 - 3i) + (7 + 8i)$

$= (0 - 2 + 7) + (-1 + 3 + 8)i = 5 + 10i$.

Vậy số phức z đã cho có phần thực a = 5 và phần ảo b = 10.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

b) Ta có $z = (0 - i).(2 + 3i).(5 + 2i) = (3 - 2i)(5 + 2i) = 19 - 4i$.

Vậy số phức z đã cho có phần thực $a = 19$ và phần ảo $b = -4$.

c) Ta có $z = \frac{6-i}{3+2i} = \frac{6-i}{3+2i}.\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{16-15i}{3^2+2^2} = \frac{16}{13} - \frac{15}{13}i$.

Vậy số phức z đã cho có phần thực $a = \frac{16}{13}$ và phần ảo $b = -\frac{15}{13}$.

d) Ta có $z = (7 - 3i)^2 - (2 - i)^2 = [(7 - 3i) + (2 - i)].[(7 - 3i) - (2 - i)]$

$= (9 - 4i)(5 - 2i) = 37 - 38i$.

Vậy số phức z đã cho có phần thực $a = 37$ và phần ảo $b = -38$.

3. a) $x = 5, y = 2$; b) $x = 4, y = -1$.

4. a) Ta có $z^2 = (4 - 3i)^2 = 4^2 - 2.4.3i + (3i)^2 = 7 - 24i$.

b) Ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{4-3i} = \frac{1}{4-3i}.\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{4+3i}{4^2+3^2} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

c) Ta có $\bar{z} = \overline{4-3i} = 4 + 3i$.

d) Ta có $z + z^2 + z^3 = z(1 + z + z^2) = (4 - 3i)[1 + (4 - 3i) + (4 - 3i)^2]$

$= (4 - 3i)[1 + (4 - 3i) + (7 - 24i)]$

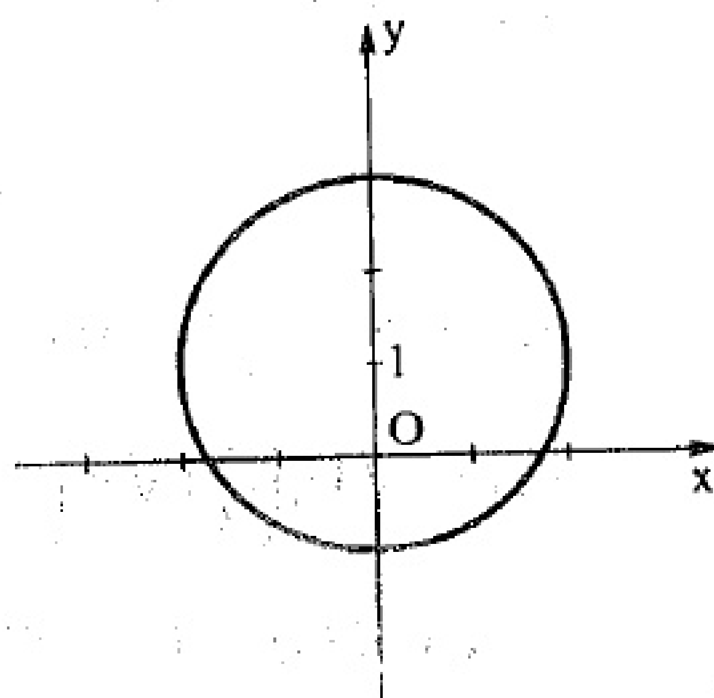
$= (4 - 3i)(12 - 27i) = -33 - 144i$.

5. a) Gọi $z = a + bi$, khi đó

$|z - i| = 2 \Leftrightarrow |(a + bi) - i| = 2$

$\Leftrightarrow |a + (b - 1)i| = 2 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 4$.

Vậy, trong mặt phẳng phức, các số $z = a + bi$ sao cho $|z - i| = 2$ được biểu diễn bởi các điểm M(a ; b) thoả mãn $a^2 + (b - 1)^2 = 4$; tức là các điểm thuộc đường tròn có phương trình $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ (h.16).



Hình 16

b) Gọi $z = a + bi$, khi đó $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$.

Ta có z^2 là số thuần ảo khi và chỉ khi

$(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

Vậy các số phức $z = a + bi$ có $\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$ thoả mãn bài toán.

Biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ : đó là các điểm nằm trên các đường thẳng có phương trình $y = x$ và $y = -x$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 008B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. a) Giả sử $z = a + bi$, ta có

$z - i = a + (b-1)i$;

$|z - i| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \le 1 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 \le 1$.

Vậy tập hợp các điểm M(a ; b) biểu diễn số phức z thoả mãn đề bài là hình tròn có tâm là điểm (0 ; 1) và bán kính 1.

b) Giả sử $z = x + yi$, từ hệ thức $|z + i| = |z + 2|$ ta có

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2y - 4x - 3 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M(x ; y) biểu diễn số phức z thoả mãn hệ thức $|z + i| = |z + 2|$ là đường thẳng $4x - 2y + 3 = 0$.

c) Số phức $z = a + bi$ mà phần thực luôn bằng 3, tức là $a = 3$. Khi đó điểm M biểu diễn số phức z là M(3 ; b). Do đó tập hợp các điểm M là đường thẳng $x = 3$.

7. $\left(\frac{1 - iz}{1 + iz}\right)^2 = \frac{z + i}{z - i}$ (điều kiện $z \ne i$)

$$\Leftrightarrow (1 - z^2 - 2iz)(z - i) = (1 - z^2 + 2iz)(z + i)$$

$$\Leftrightarrow z - z^3 - 2iz^2 - i + iz^2 - 2z = z - z^3 + 2iz^2 + i - iz^2 - 2z$$

$$\Leftrightarrow 2iz^2 + 2i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z = i \text{ (loại) còn } z = -i \text{ (nhận)}.$$

Vậy điểm biểu diễn của $z = x + iy$ thỏa mãn điều kiện đã cho là điểm $M(0 ; -1)$.

§2. Giải phương trình trên tập số phức

1. Tính căn bậc hai của các số phức $3 + 4i$ và $5 - 12i$.

2. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $(3 + 2i)z - 2 + 15i = 0$; b) $z^2 - 6z + 29 = 0$;

c) $z^2 + z + 1 = 0$.

3. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $z^2 - 3z + 4 - 6i = 0$; b) $z^2 - (3 + 4i)z + (-1 + 5i) = 0$.

LTĐH-CĐ TOÁN LÊ HOÀ 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. Tìm nghiệm của phương trình $\bar{z} = z^2$, ở đây $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z.

5. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$; b) $z^2 + (1 + i)z - (1 - i) = 0$.

6. Cho hai phương trình: $z^2 - (2 - i)z + 1 - i = 0$ (1)

$z^2 + (2 - i)z + 1 - i = 0$ (2)

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của (1), z_3, z_4 là hai nghiệm của (2). Hãy tính các tổng: $T_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ và $T_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. Tính căn bậc hai của các số phức 3 + 4i, 5 – 12i.

Gọi số phức u + vi là căn bậc hai của số phức 3 + 4i, khi đó có $(u + iv)^2 = 3 + 4i$.

Từ đẳng thức trên suy ra hệ phương trình $\begin{cases} u^2 - v^2 = 3 \\ 2uv = 4. \end{cases}$

Giải hệ phương trình đối với u và v, ta nhận được $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u = -2 \\ v = -1. \end{cases}$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức 3 + 4i là $2 + i$ và $-2 - i$.

Tương tự tìm được hai căn bậc hai của số phức 5 – 12i là 3 – 2i và –3 + 2i .

2. a) (3 + 2i)z – 2 + 15i = 0

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2 - 15i}{3 + 2i} = \dfrac{(2 - 15i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \dfrac{6 - 4i - 45i - 30}{9 + 4} = -\dfrac{24}{13} - \dfrac{49}{13}i.$

b) Ta có $\Delta' = -20$. Phương trình có hai nghiệm phức :

$z_1 = 3 + 2i\sqrt{5}, \quad z_2 = 3 - 2i\sqrt{5}.$

c) Ta có $\Delta = -3 < 0$. Phương trình có hai nghiệm phức :

$z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

3. a) *Đáp số :* $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -2i$.

b) Ta có : $\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-1 + 5i) = -7 + 24i - (-4 + 20i) = -3 + 4i$.

LTĐH CÔ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Khai căn bậc hai của $\Delta = -3 + 4i$ ta được hai giá trị là $1 + 2i$ và $-1 - 2i$. Vậy phương trình có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{(3+4i)+(1+2i)}{2} = 2+3i, \quad z_2 = \frac{(3+4i)-(1+2i)}{2} = 1+i.$$

4. Gọi $z = a + bi$, ta có $\overline{z} = a - bi$ và $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$.

Ta cần tìm các số thực a và b sao cho $\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$

Giải hệ trên ta được các nghiệm $(0 ; 0)$, $(1 ; 0)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy phương trình có các nghiệm

$$z = 0 ; z = 1 ; z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

5. a) $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$;

HD. Phương trình trung gian $w^2 - 2w + 5 = 0$ có nghiệm $w = 1 \pm 2i$, phương trình đã cho có 4 nghiệm $\pm\sqrt{1 \pm 2i}$.

b) Xét phương trình $z^2 + (1 + i)z - (1 - i) = 0$.

Ta có $\Delta = (1 + i)^2 + 4(1 - i) = 4 - 2i$.

Gọi $w = a + bi$ sao cho $(a + bi)^2 = 4 - 2i$ thì

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ (2ab)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \sqrt{5} - 2 \\ a^2 = \sqrt{5} + 2. \end{cases}$$

Kết hợp với $ab = -1$ ta có $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \sqrt{\sqrt{5} + 2} \\ b = -\sqrt{\sqrt{5} - 2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\sqrt{\sqrt{5} + 2} \\ b = \sqrt{\sqrt{5} - 2}. \end{cases} \end{array}\right.$

Từ đó, phương trình đã cho có các nghiệm

$$z_{1,2} = \frac{-(1+i) \pm \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} - i\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)}{2}$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 0008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

hay $$z_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}-1}{2} - \left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}+1}{2}\right)i\ ;$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+1}{2} + \left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}-1}{2}\right)i.$$

6. Các hệ số của phương trình bậc hai có dạng $a \mp b + c = 0$, nên phương trình (1) có hai nghiệm là $z_1 = 1; z_2 = \frac{c}{a} = 1 - i$ và phương trình (2) có hai nghiệm

$$z_3 = -1;\ z_4 = \frac{-c}{a} = -1 + i.$$

Từ đó có $T_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 + (1 - i) + (-1) + (-1 + i) = 0$;

$$T_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1^2 + (1-i)^2 + (-1)^2 + (-1+i)^2$$

$$= 1 + 1 + i^2 - 2i + 1 + i^2 - 2i + 1 = 2 - 4i.$$

§3. Dạng lượng giác của số phức

1. Viết số phức $1 + i$ dưới dạng lượng giác rồi tính $(1 + i)^{15}$.

2. Rút gọn biểu thức $\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.

3. Tìm môđun và acgumen của số phức $z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$.

4. Chứng minh rằng $3(1 + i)^{100} = 4i(1 + i)^{98} - 4(1 + i)^{96}$.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. Với số phức $z = 1 + i$, ta có thể đưa về dạng lượng giác : $z = r($co [illegible] $\alpha)$,

trong đó $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\sqrt{2}\cos\alpha = 1$, $\sqrt{2}\sin\alpha = 1$, tức là α [illegible] 4

Do đó $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

TĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Áp dụng công thức Moa-vrơ ta có

$$(1+i)^{15} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{15} = (\sqrt{2})^{15}.\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$$

$$= 2^7\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 128 - 128i.$$

2. $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = \dfrac{(1 + i\tan\alpha)^2}{1 - (i\tan\alpha)^2} = \dfrac{1 + 2i\tan\alpha - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

$$= (1 + 2i\tan\alpha - \tan^2\alpha).\cos^2\alpha = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha.\cos\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

3. Ta có $z = \dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha} = \dfrac{(1+\cos\alpha+i\sin\alpha).(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha-i\sin\alpha).(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)}$

$$= \frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\cos\alpha+2i\sin\alpha+2i.\cos\alpha\sin\alpha}{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2\cos\alpha(1+\cos\alpha)+i2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{2(1+\cos\alpha)} = \cos\alpha + i.\sin\alpha.$$

Vậy $|z| = 1$; acgumen của z là α.

4. Ta có $3(1+i)^{100} - 4i(1+i)^{98} + 4(1+i)^{96}$

$$= (1+i)^{96}\left[3(1+i)^4 - 4i(1+i)^2 + 4\right]$$

$$= (1+i)^{96}\left[3(2i)^2 - 4i(2i) + 4\right] = (1+i)^{96}.0 = 0.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Chủ đề 5

KHỐI ĐA DIỆN

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Khối lăng trụ, khối chóp, khối chóp cụt, khối đa diện. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của hai khối đa diện.
2. Khối đa diện đều, 5 loại khối đa diện đều : tứ diện đều, lập phương, bát diện đều, thập nhị diện đều và nhị thập diện đều. ***Tính đối xứng qua mặt phẳng của khối tứ diện đều, bát diện đều và hình lập phương. Phép vị tự trong không gian.***
3. Thể tích khối đa diện. Thể tích khối hộp chữ nhật. Công thức tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp và khối chóp cụt.

Các dạng toán cần luyện tập :

Tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối chóp cụt và các khối đa diện khác bằng cách phân chia và lắp ghép.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

§1. Khối đa diện

1. Hãy phân chia một khối tứ diện đều thành :

   a) Hai khối tứ diện bằng nhau ;

   b) Ba khối tứ diện đôi một bằng nhau ;

   c) Bốn khối tứ diện đôi một bằng nhau.

2. Hãy phân chia một khối lập phương thành:

   a) Ba khối chóp tứ giác đôi một bằng nhau ;

   b) Bốn khối chóp tam giác đôi một bằng nhau và một khối tứ diện đều.

3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các mặt là hình thoi cạnh a, các góc BAD, DAA' và A'AB đều bằng 60°. Chứng tỏ rằng có thể phân chia khối hộp đó thành hai khối tứ diện đều và một khối bát diện đều.

4. Cho khối hộp ABCD. A'B'C'D'. Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A', AA'. Chứng minh rằng :

   a) Sáu điểm E, F, G, H, I, J đồng phẳng.

   b) Mặt phẳng đi qua các điểm E, F, G, H, I, J chia khối hộp thành hai phần bằng nhau.

http://sachviet.edu.vn

5. Cho tứ diện ABCD có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối diện là đường vuông góc chung của hai cạnh đó.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đối diện của tứ diện.

6. Hình chóp tứ giác S.ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng đó là hình chóp đều.

7. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ dài lần lượt là a, b, c.

a) Chứng minh rằng ABC là tam giác nhọn.

b) Gọi H là chân đường cao của tứ diện kẻ từ điểm O. Chứng minh rằng H là trực tâm tam giác ABC. Tính độ dài OH.

c) Chứng minh rằng bình phương diện tích tam giác ABC bằng tổng bình phương diện tích các tam giác OAB, OBC, OCA.

d) Chứng minh rằng $\cos^2\widehat{AOH} + \cos^2\widehat{BOH} + \cos^2\widehat{COH} = 1$.

e) Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi mp(ABC) và các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

8. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Chứng minh rằng :

a) $AD \perp BC$;

b) Chân đường cao hạ từ mỗi đỉnh của tứ diện là trực tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy ;

c) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

9. Một hình tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau và vuông góc với nhau có phải là hình tứ diện đều hay không ?

10. Cho khối hộp ABCD. A'B'C'D'. Xét khối tứ diện AB'CD'. Chứng minh rằng:

a) Nếu khối tứ diện AB'CD' có các cạnh đối bằng nhau thì ABCD. A'B'C'D' là khối hộp chữ nhật.

b) Nếu khối tứ diện AB'CD' có các cạnh đối vuông góc với nhau thì ABCD. A'B'C'D' là khối hộp có tất cả các cạnh bằng nhau.

c) Nếu AB'CD' là khối tứ diện đều thì ABCD. A'B'C'D' là khối lập phương.

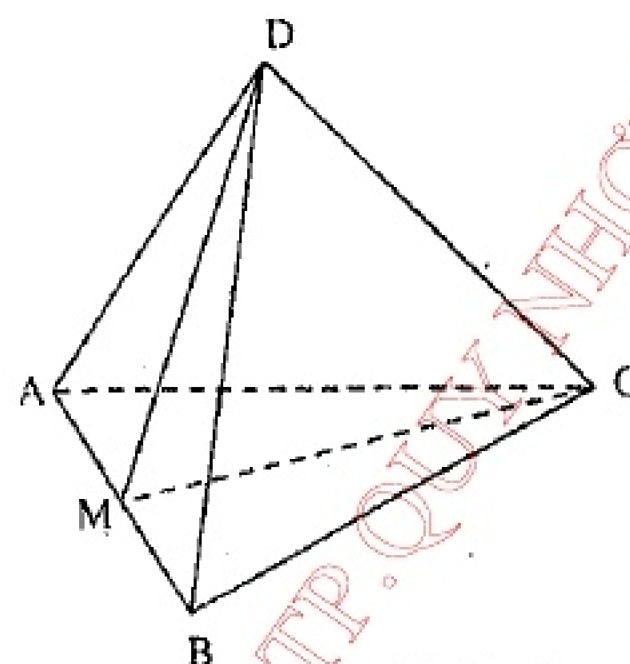
LTĐH-CĐ-TOÁN-LÍ-HÓA 0001-TRẦN TRUNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

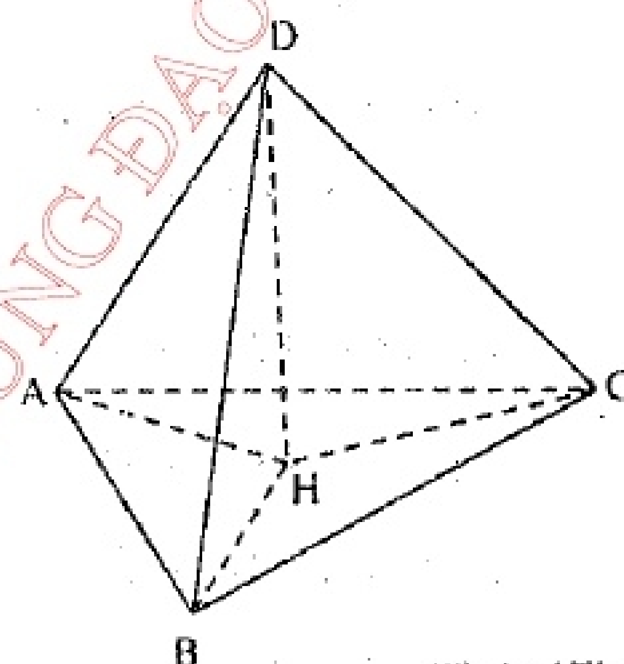
1. Gọi ABCD là khối tứ diện đều.

a) Gọi M là trung điểm một cạnh nào đó, AB chẳng hạn (h.17a). Khi đó mp(MCD) phân chia khối tứ diện ABCD thành hai khối tứ diện MBCD và MACD đối xứng với nhau qua mp(MCD) nên bằng nhau.



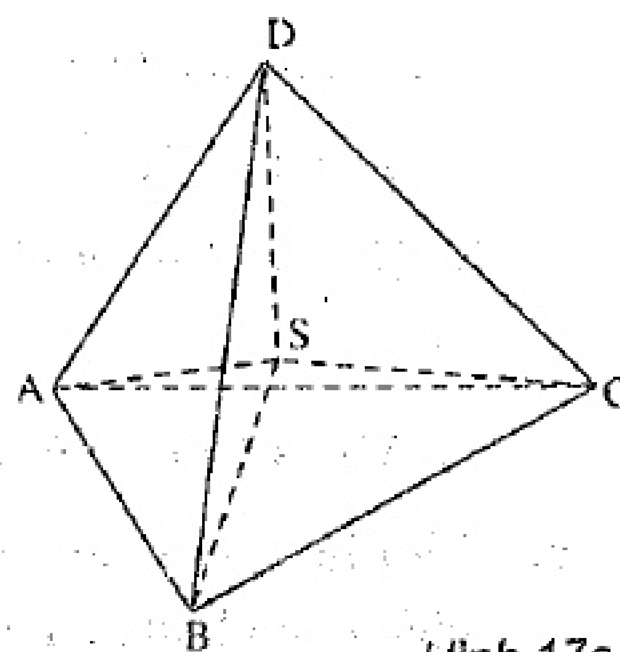
Hình 17a

b) Gọi H là tâm của tam giác đều ABC (h.17b). Khối tứ diện ABCD có thể phân thành ba khối tứ diện DHAB, DHBC, DHCA. Hai khối tứ diện DHAB và DHBC đối xứng với nhau qua mặt phẳng (DHB) nên bằng nhau, hai khối tứ diện DHBC và DHCA đối xứng với nhau qua mp(DHC) nên cũng bằng nhau.



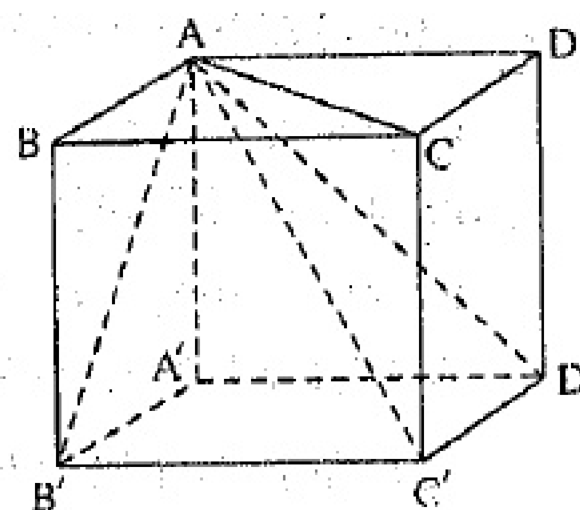
Hình 17b

c) Gọi S là trọng tâm tứ diện ABCD (h.17c). Khối tứ diện ABCD có thể phân thành 4 khối tứ diện SBCD, SACD, SABD và SABC. Hai tứ diện bất kì trong 4 tứ diện đó đều có một mặt chung và phép đối xứng qua mặt phẳng chứa mặt chung đó sẽ biến tứ diện này thành tứ diện kia nên chúng bằng nhau.



Hình 17c

2. a) Giả sử ABCD.A'B'C'D' là khối lập phương (h.18a). Có thể phân chia khối lập phương đó thành ba khối chóp tứ giác sau đây : A. A'B'C'D', A.BB'C'C và A.DD'C'C. Phép đối xứng qua mp(AB'C'D) biến các điểm A, B', C' thành chính nó, biến A' thành B và D' thành C, bởi vậy nó biến khối chóp A.A'B'C'D' thành khối chóp A.BB'C'C. Vậy hai khối chóp đó bằng nhau. Phép đối xứng qua mp(ACC'A') biến các điểm A, C, C' thành chính nó, biến B thành D và B' thành D', bởi vậy nó biến khối chóp A.BB'C'C thành khối chóp A.DD'C'C. Vậy hai khối chóp đó bằng nhau.

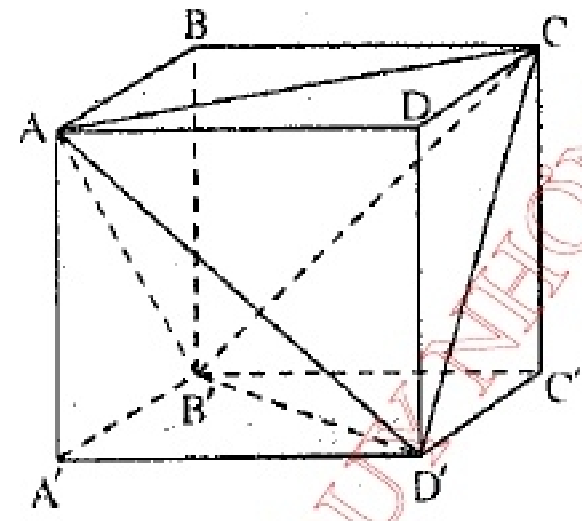


Hình 18a

LTĐH - TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

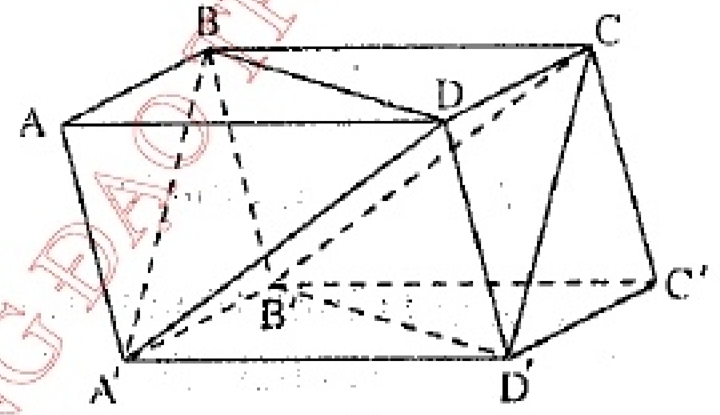
http://sachviet.edu.vn

b) (h.18b) Khối lập phương đó có thể chia thành một khối tứ diện đều AB'CD' và bốn khối tứ diện A'AB'D', BAB'C, C'B'CD', DD'AC. Hai trong bốn khối tứ diện đó bằng nhau. Chẳng hạn hai khối tứ diện A'AB'D' và BAB'C bằng nhau vì chúng đối xứng với nhau qua mp(AB'C'D).



Hình 18b

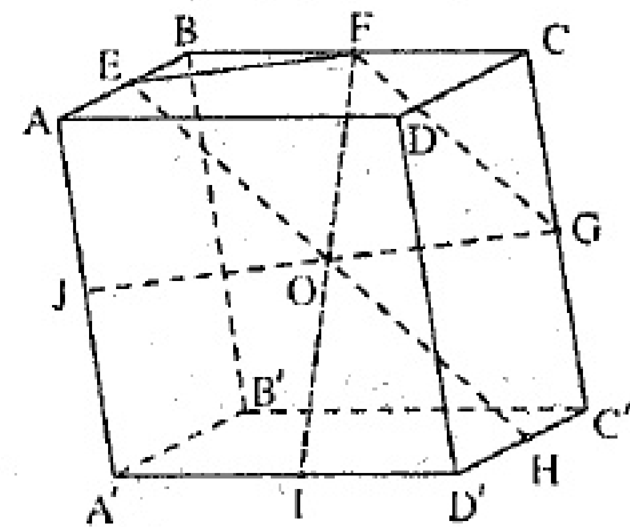
3. (h.19) Từ giả thiết ta suy ra các tứ diện ABDA' và CB'C'D' là các khối tứ diện đều. Nếu ta cắt bỏ hai khối tứ diện đó khỏi khối hộp đã cho thì phần còn lại là khối đa diện với 8 mặt là tám tam giác đều : CBD, CDD', CD'B', CBB', A'BD, A'DD', A'D'B', A'BB'. Vậy đó là khối bát diện đều.



Hình 19

4. a) Gọi O là tâm của hình hộp đã cho thì O là trung điểm của các đoạn thẳng EH, FI và GJ (h. 20). Ngoài ra dễ thấy OEFG là hình bình hành (vì $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{FG} = \dfrac{\overrightarrow{BC'}}{2}$) hay bốn điểm O, E, F, G đồng phẳng. Từ đó suy ra 6 điểm E, F, G, H, I, J đồng phẳng.

b) Mặt phẳng đi qua các điểm E, F, G, H, I, J chia hình hộp thành hai phần là hai khối đa diện đối xứng với nhau qua điểm O nên hai phần đó bằng nhau.

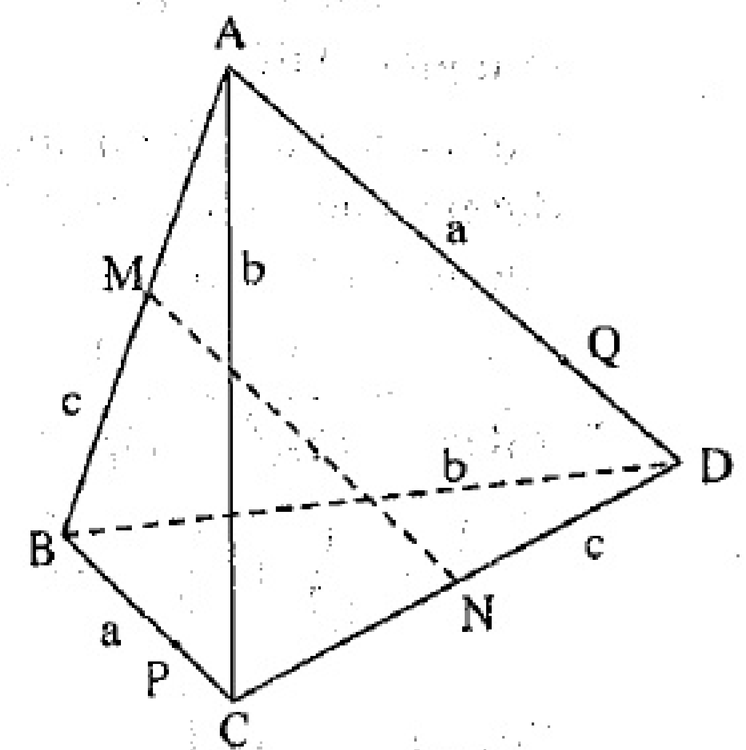


Hình 20

5. a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối diện AB và CD (h. 21). Hai tam giác ABC và ABD bằng nhau (có ba cạnh là a, b, c) nên có hai đường trung tuyến bằng nhau : CM = DM, vậy MCD là tam giác cân và vì N là trung điểm của CD nên $MN \perp CD$.

Chứng minh tương tự, ta có $MN \perp AB$. Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD chính là độ dài đoạn thẳng MN. Áp dụng công thức về đường trung tuyến cho tam giác



Hình 21

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

ABC và ABD ta có $CM^2 = DM^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Từ đó ta có $MN^2 = CM^2 - CN^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là $d(AB,CD) = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

Tương tự :

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD là $d(AC,BD) = \sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}$.

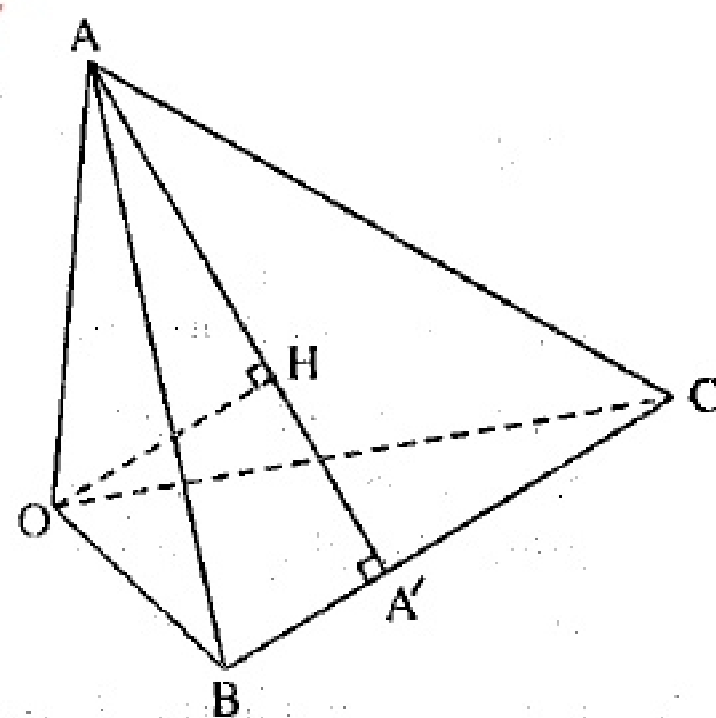
Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC là $d(AD,BC) = \sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}}$.

6. Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng ABCD. Vì SA = SB = SC = SD nên OA = OB = OC = OD, vậy tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Nhưng theo giả thiết, tứ giác ABCD là hình thoi, bởi vậy nó là hình vuông. Từ đó suy ra hình chóp S.ABCD là hình chóp đều.

7. a) Ta có $AB^2 = a^2 + b^2$, $BC^2 = b^2 + c^2$, $CA^2 = c^2 + a^2$ (h. 22). Bởi vậy:

$AB^2 + BC^2 > CA^2$, $BC^2 + CA^2 > AB^2$, $CA^2 + AB^2 > BC^2$. Suy ra ba góc của tam giác ABC đều nhọn.

b) Vì $OH \perp mp(ABC)$ nên $OH \perp BC$, ngoài ra $OA \perp BC$ (vì OA vuông góc với OB và OC), suy ra $AH \perp BC$, chứng minh tương tự ta có $BH \perp AC$. Vậy H là trực tâm tam giác ABC.



Hình 22

Gọi A' là giao điểm của AH và BC thì OH là đường cao của tam giác vuông OAA' và OA' là đường cao của tam giác vuông OBC nên :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Suy ra : $$OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

LTĐHCĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000BT TRẦN HÙNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

c) Ta có $3V_{OABC} = OH.S_{ABC} = OA.S_{OBC}$ (dùng kí hiệu S_{MNP} để chỉ diện tích tam giác MNP) nên: $S_{ABC} = \dfrac{S_{OBC}.OA}{OH} = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{2}$

Vậy : $S_{ABC}^2 = \left(\dfrac{ab}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{bc}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{ca}{2}\right)^2 = S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2$.

d) Ta có : $\cos^2 \widehat{AOH} + \cos^2 \widehat{BOH} + \cos^2 \widehat{COH}$

$$= \left(\frac{OH}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OC}\right)^2 = OH^2\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right) = 1.$$

e) Vì AA' và OA' đều vuông góc với BC là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) nên $\alpha = \widehat{OA'A} = \widehat{AOH}$, tương tự : $\beta = \widehat{BOH}$, $\gamma = \widehat{COH}$.

Vậy: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\widehat{AOH} + \cos^2\widehat{BOH} + \cos^2\widehat{COH} = 1$.

8. a) Với mọi hình tứ diện ABCD ta đều có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Thật vậy : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} =$

$$= (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}).\overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}).\overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}).\overrightarrow{DB} = 0.$$

Đối với hình tứ diện đã cho thì $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ và do đó $AD \perp BC$.

b) Gọi AA' là đường cao của tứ diện kẻ từ A. Khi đó $AA' \perp CD$, ngoài ra $AB \perp CD$ nên $BA' \perp CD$, tương tự $CA' \perp BD$. Vậy A' là trực tâm tam giác BCD.

c) Ta có:

$$AB^2 + CD^2 = AB^2 + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$$

$$AC^2 + BD^2 = AC^2 + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}.$$

Vì $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ nên $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$, do đó $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$.

Từ đó suy ra : $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. Chứng minh tương tự ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

9. Giả sử tứ diện ABCD có các cạnh đối vuông góc thì theo bài 8 ta có :

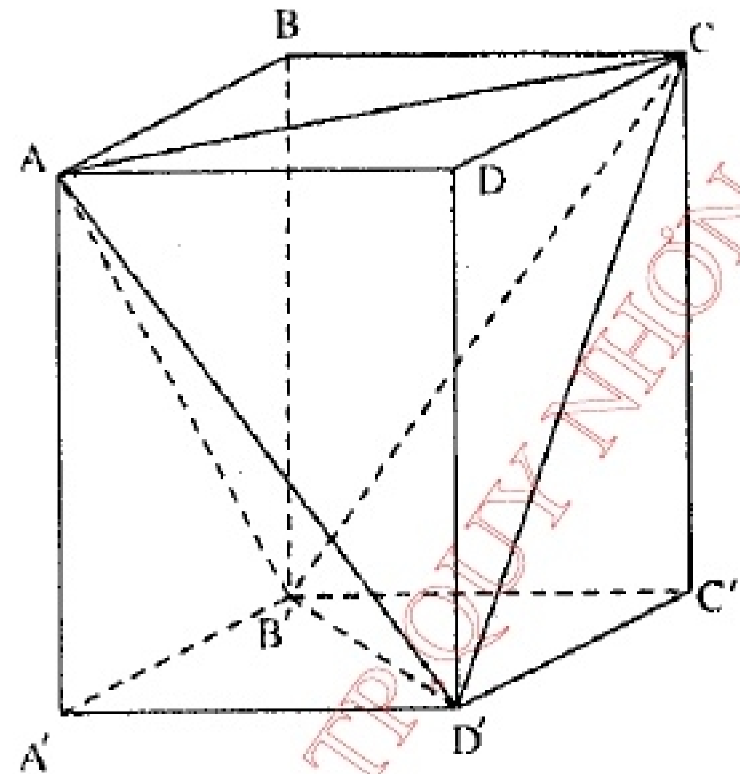
$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \quad (*).$$

Nếu các cạnh đối diện bằng nhau : AB = CD, AC = BD, AD = BC thì từ (*) ta suy ra AB = AC = AD nên ABCD là tứ diện đều.

LTĐH CĐ TOÁN LÍ HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

10. a) Giả sử khối tứ diện AB'CD' có các cạnh đối bằng nhau (h.23). Khi đó AB' = CD', nhưng AB' = C'D, nên CD' = C'D, suy ra hình bình hành CDD'C' là hình chữ nhật. Tương tự như vậy, các mặt của khối hộp đã cho đều là hình chữ nhật nên khối hộp đó là khối hộp chữ nhật.



Hình 23

b) Giả sử khối tứ diện AB'CD' có các cạnh đối vuông góc với nhau. Khi đó AB'⊥CD', nhưng AB'//C'D, nên CD'⊥C'D, suy ra hình bình hành CDD'C' là hình thoi. Tương tự như vậy đối với các mặt khác. Vậy tất cả các cạnh của khối hộp đều bằng nhau.

c) Nếu AB'CD' là khối tứ diện đều thì các cạnh đối của nó bằng nhau và vuông góc với nhau. Bởi vậy theo a) và b) thì ABCD.A'B'C'D' là khối hộp chữ nhật và có các cạnh bằng nhau, tức nó là khối lập phương.

§2. Thể tích khối đa diện

1. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D' và một điểm M nằm trên cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua ba điểm D, M và B'.
   a) Dựng thiết diện của khối hộp khi cắt bởi mặt phẳng (α).
   b) Mặt phẳng (α) chia khối hộp đã cho thành hai phần. Tìm tỉ số thể tích hai phần đó.
2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích V.
   a) Tính thể tích các hình tứ diện ACB'D' và C'A'DB.
   b) Tính thể tích của khối đa diện lồi $\mathscr{H}$ có các đỉnh là tâm của các mặt của khối hộp đã cho.
3. Tính thể tích khối chóp tứ giác có tất cả các cạnh đều bằng a.
4. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích V.
   a) Tính thể tích tứ diện ACA'B'.
   b) Gọi E là điểm đối xứng với A qua điểm C, F là điểm đối xứng với B' qua điểm A'. Tính thể tích tứ diện AEFB'.
5. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm hai cạnh BC và BB'.
   a) Tìm thể tích tứ diện AD'EF.
   b) Tính khoảng cách từ điểm D' tới mp(AEF).

LTĐH-SGK TOÁN-LÝ-HÓA 2000Đ TRẦN TUẤN ĐẠT TRỌNG NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có các cạnh đều bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CC' và C'A'.

a) Tính thể tích tứ diện PAMN.

b) Tính khoảng cách từ điểm A tới mp(PMN).

7. Tứ diện ABCD có bốn mặt là các tam giác vuông, $AB = BC = a$ và $AD = b$ là cạnh có độ dài lớn nhất. Tính thể tích tứ diện đó.

8. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = BC = CD = BD = a$ và $AD = x$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC theo a và x.

b) Tính thể tích tứ diện theo a và x.

c) Tìm giá trị x để thể tích đó là lớn nhất, và giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

9. Cho hình chóp S.ABCD có $SA = SC = AB = BC = CD = DA = a$, $SB = SD = x$.

a) Tính thể tích hình chóp theo a và x.

b) Tìm giá trị x để thể tích đó là lớn nhất, và giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

10. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a) Xác định thiết diện của khối hộp khi cắt bởi mặt phẳng (A'EF).

b) Thiết diện đó chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

11. Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA. Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua M, N, P chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

12. Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác vuông tại A và $AC = b$, $\widehat{C} = 60^o$. Đường thẳng BC' tạo với mp(AA'C'C) một góc 30^o.

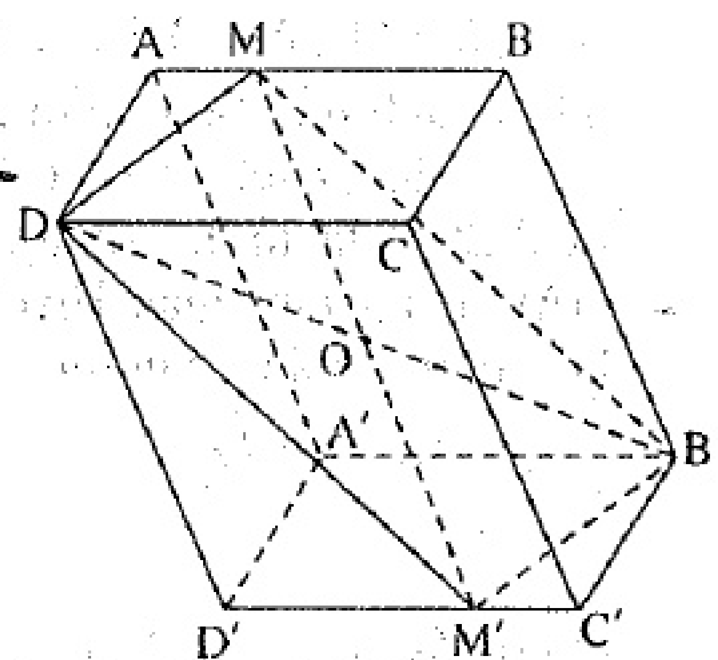
a) Tính độ dài đoạn AC'.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) (h.24) Gọi O là tâm đối xứng của hình hộp thì đường thẳng MO cắt cạnh D'C' tại điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'. Thiết diện là hình bình hành DMB'M'.

b) Vì mặt phẳng (α) đi qua tâm đối xứng O của hình hộp nên nó chia hình hộp thành hai phần đối xứng với nhau qua O. Suy ra hai phần đó bằng nhau và do đó có thể tích bằng nhau. Vậy tỉ số thể tích hai phần đó bằng 1.



Hình 24

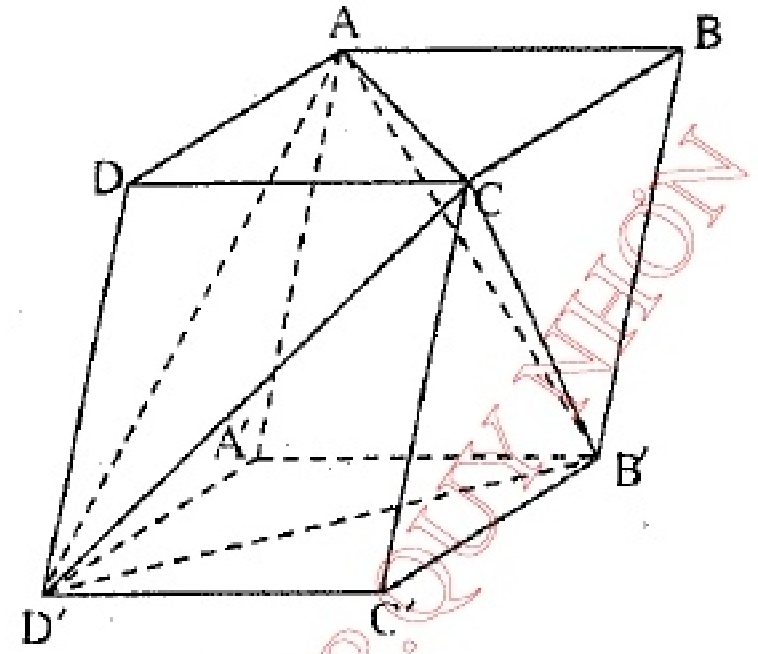
LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2. a) (h.25) Khối hộp ABCD. A'B'C'D' được phân chia thành các khối tứ diện : ACB'D', A'AB'D', B'CC'D', BACB' và DACD'. Hiển nhiên bốn khối tứ diện A'AB'D', B'CC'D', BACB' và DACD' có thể tích bằng nhau và bằng $\frac{V}{6}$. Từ đó suy ra :

$$V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{V}{6} = \frac{V}{3}.$$

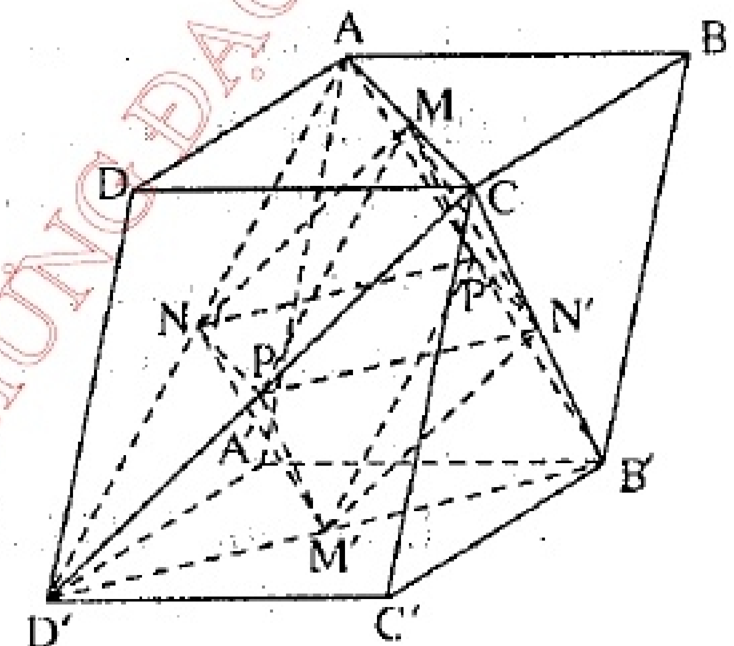
Gọi O là tâm của khối hộp thì phép đối xứng qua O biến tứ diện ACB'D' thành tứ diện C'A'DB nên $V_{C'A'DB} = \frac{V}{3}$.



Hình 25

b) (h.26) Ta gọi M, M', N, N', P, P' lần lượt là tâm các mặt của hình hộp (xem hình 26), chúng đồng thời là trung điểm các cạnh của tứ diện ACB'D'. Khối đa diện $\mathscr{H}$ là phần còn lại của tứ diện ACB'D' sau khi cắt bỏ đi bốn tứ diện AMNP', CMPN', B'M'N'P', D'M'NP. Hiển nhiên bốn khối tứ diện này có thể tích bằng nhau và bằng $\frac{1}{8}V_{ACB'D'} = \frac{V}{24}$.

Bởi vậy : $V_{\mathscr{H}} = \frac{V}{3} - 4.\frac{V}{24} = \frac{V}{6}$.

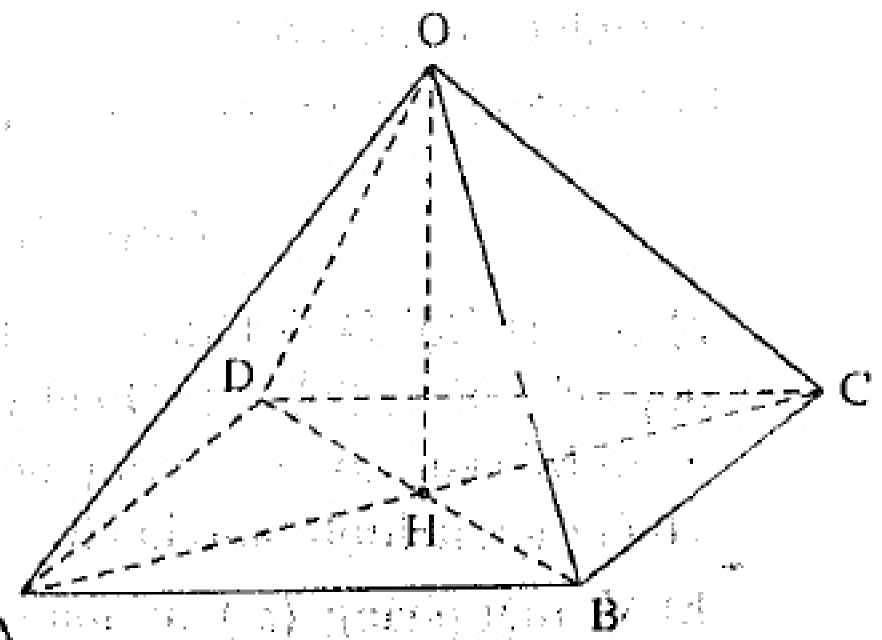


Hình 26

3. Giả sử khối chóp O.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a (h. 27). Gọi H là tâm của hình thoi ABCD thì vì các tam giác OAC và OBD là tam giác cân đỉnh O nên OH vuông góc với AC và BD nên $OH \perp mp(ABCD)$. Vì O cách đều bốn điểm A, B, C, D nên H cũng cách đều 4 điểm đó. Suy ra ABCD là hình vuông. Tam giác OAC bằng tam giác BAC nên cũng là tam giác vuông cân, vậy

$$OH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $V_{O.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.OH = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Hình 27

LTĐH-CĐ TOÁN 1A-HÌNH 1000B TRẦN THỊ HỒNG ĐÀO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

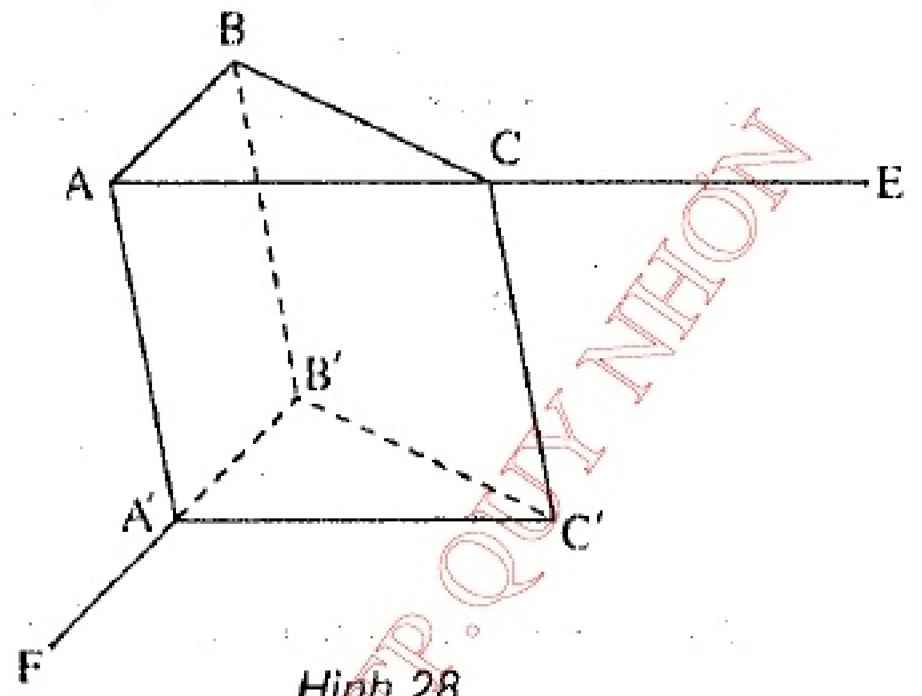
4. a) Vì CC' // AA' (h. 28)

nên $V_{ACA'B'} = V_{AC'A'B'} = \frac{V}{3}$.

b) Vì AE = 2AC nên $V_{AEFB'} = 2V_{ACFB'}$,

vì FB' = 2A'B' nên $V_{ACFB'} = 2V_{ACA'B'}$.

Vậy $V_{AEFB'} = 4V_{ACA'B'} = \frac{4}{3}V$.

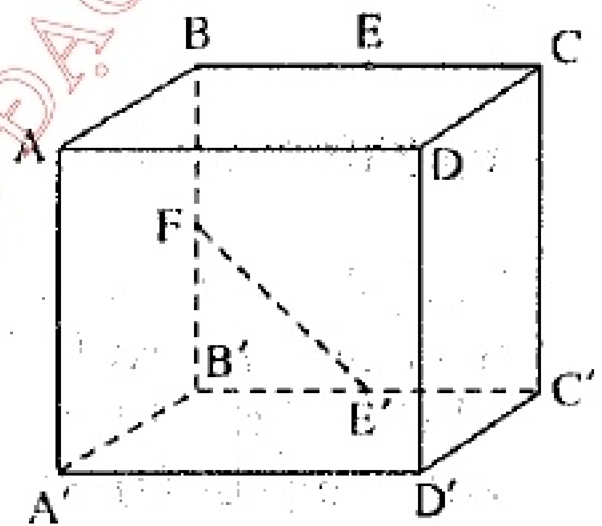


Hình 28

5. a) Gọi E' là trung điểm cạnh B'C' (h. 29) thì FE'//AD' nên $V_{AD'EF} = V_{AD'EE'}$.

Vì EE' // DD' nên $V_{AD'EE'} = V_{ADEE'} = \frac{a^3}{6}$.

Vậy $V_{AD'EF} = \frac{a^3}{6}$.



Hình 29

b) Tam giác AEF có

$AE = AF = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

và $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $S_{AEF} = \frac{3a^2}{8}$. Gọi h là khoảng cách từ điểm D' tới mp(AEF) thì : $h = \frac{3V_{AD'EF}}{S_{AEF}} = \frac{3a^3}{6} : \frac{3a^2}{8} = \frac{4a}{3}$.

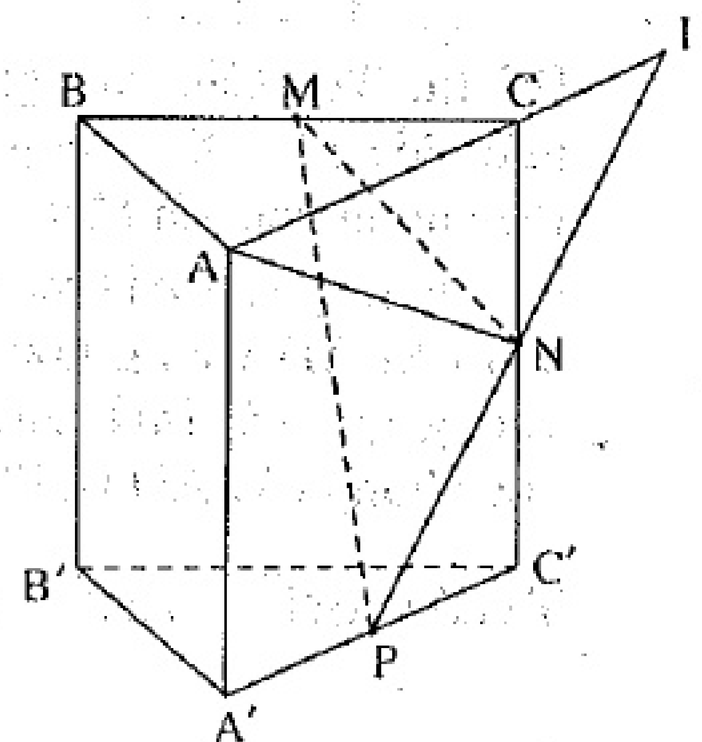
6. a) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AC và PN (h.30) thì N là trung điểm của PI nên

$V_{PAMN} = \frac{1}{2}V_{PAMI}$.

Hình chóp P.AMI có $AI = \frac{3AC}{2} = \frac{3a}{2}$ nên đáy AMI có diện tích là:

$S_{AMI} = \frac{1}{2}AM.AI.\sin 30^o$

$= \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$.



Hình 30

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 0001 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

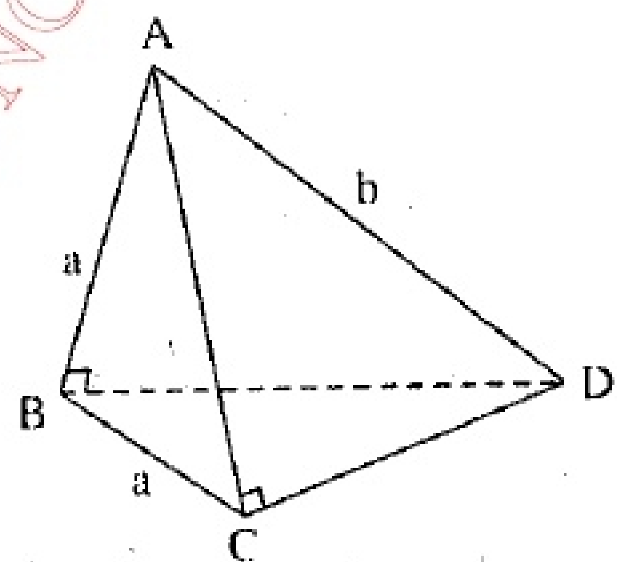
Chiều cao hình chóp đó bằng a nên thể tích của hình chóp là $V_{PAMI} = \frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

Vậy $V_{PAMN} = \frac{\sqrt{3}a^3}{32}$.

b) Tam giác cân MNP có $MN = NP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Để tính cạnh MP, ta gọi P' là trung điểm của AC thì tam giác PP'M vuông tại P' nên $MP = \sqrt{P'P^2 + P'M^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Bởi vậy ta tính được $S_{MNP} = \frac{\sqrt{15}a^2}{16}$. Gọi h là khoảng cách từ điểm A tới mp(PMN) thì : $h = \frac{3V_{PAMN}}{S_{PMN}} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{32} : \frac{a^2\sqrt{15}}{16} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

7. Vì cạnh AD lớn nhất nên tam giác ABD vuông ở B và tam giác ACD vuông ở C (h. 31). Tam giác ABC có AB = BC nên phải vuông ở B. Vậy ta có $AB \perp mp(BCD)$ và từ đó suy ra tam giác BCD vuông ở C.



Hình 31

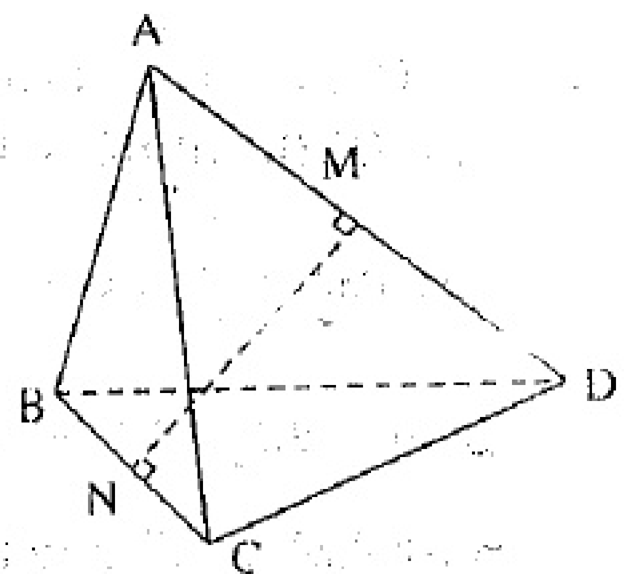
Ta có $AD^2 = AC^2 + CD^2$ hay $b^2 = 2a^2 + CD^2$, vậy với điều kiện $b > a\sqrt{2}$ ta được

$CD = \sqrt{b^2 - 2a^2}$.

Suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.BC.CD = \frac{1}{6}a^2\sqrt{b^2 - 2a^2}$.

8. a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AD và BC (h. 32). Các tam giác ABC và DBC là tam giác đều nên BC vuông góc với AN và DN, vậy BC vuông góc với MN.

Các tam giác BAD và CAD là những tam giác cân nên AD vuông góc với BM và CM, vậy AD vuông góc với MN. Suy ra MN là đường vuông góc chung của AD và BC.



Hình 32

Ta có : $MN^2 = AN^2 - AM^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4}$.

Vậy với điều kiện $0 < x < a\sqrt{3}$ thì $MN = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÝ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

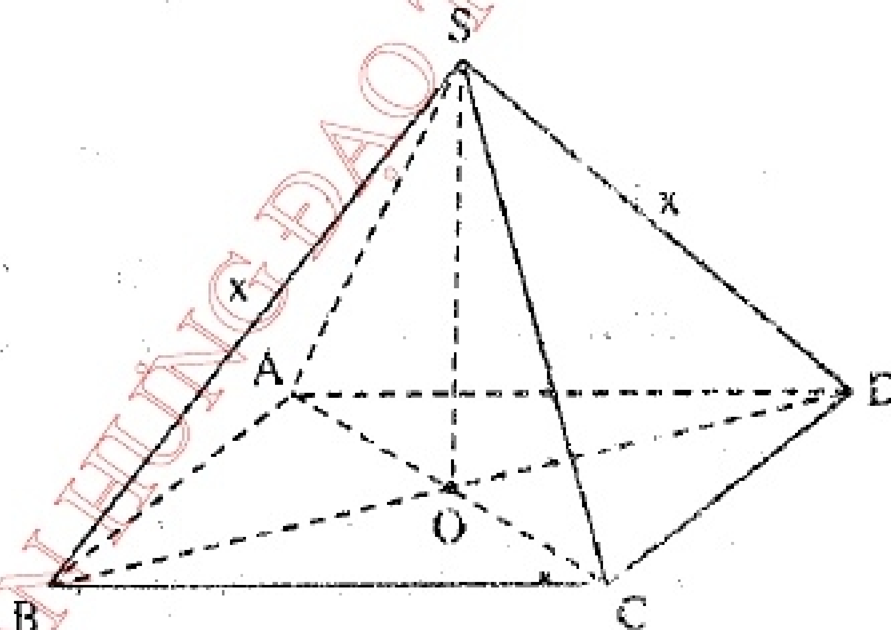
http://sachviet.edu.vn

b) $V_{ABCD} = 2V_{A.BCM} = \frac{2}{3}S_{BMC}.AM = \frac{2}{3}\frac{BC.MN}{2}.AM = \frac{ax\sqrt{3a^2 - x^2}}{12}$.

c) Ta có thể viết $V_{ABCD} = \frac{a}{12}\sqrt{\left(3a^2 - x^2\right)x^2} \le \frac{a}{12}.\frac{\left(3a^2 - x^2\right) + x^2}{2} = \frac{a^3}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $3a^2 - x^2 = x^2$ hay $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì tứ diện có thể tích lớn nhất bằng $\frac{a^3}{8}$.

9. a) Gọi O là tâm của hình thoi ABCD (h. 33). Vì các tam giác SAC và SBD là tam giác cân nên SO vuông góc với AC và BD, vậy SO là đường cao của hình chóp. Ba tam giác cân SAC, BAC, DAC bằng nhau (có chung cạnh đáy AC, còn các cạnh bên đều bằng a nên OS = OB = OD, suy ra tam giác SBD là tam giác vuông. Vậy:



Hình 33

$OS = OB = OD = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Trong tam giác vuông OAB ta có

$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2 - x^2}{2}}$ với điều kiện $0 < x < a\sqrt{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = 4V_{S.OAB} = \frac{4}{6}OS.OA.OB = \frac{x^2}{3}\sqrt{\frac{2a^2 - x^2}{2}}$.

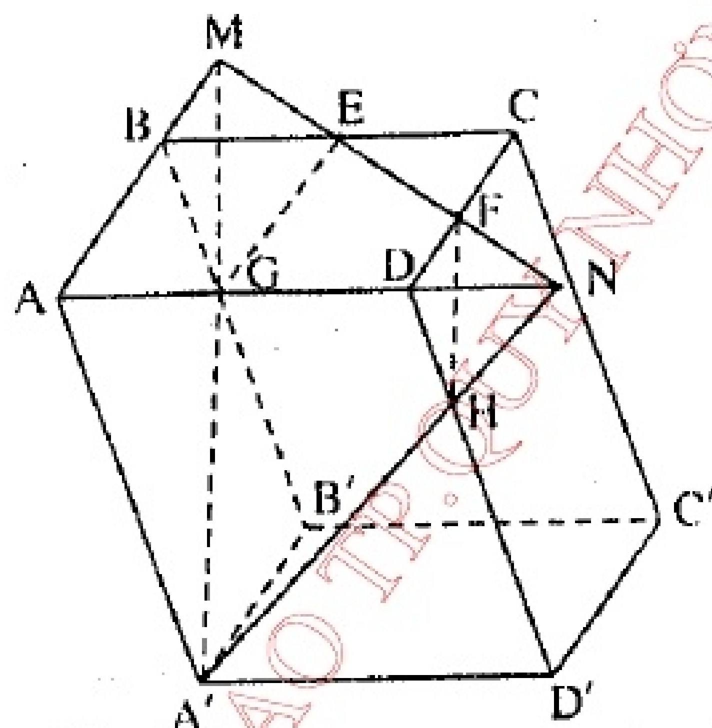
b) Ta có thể viết $V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}\sqrt{\left(4a^2 - 2x^2\right)x^2x^2}$. Chú ý rằng số $M = \left(4a^2 - 2x^2\right)x^2x^2$ là tích của ba số $\left(4a^2 - 2x^2\right)$, x^2 và x^2 mà ba số ấy có tổng không đổi bằng $4a^2$. Từ đó suy ra M có giá trị lớn nhất khi ba số đó bằng nhau, tức là $x^2 = \frac{4a^2}{3}$ hay $x = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó thể tích lớn nhất của hình chóp là $V_{max} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

10. a) Kéo dài EF cắt AB tại M, cắt AD tại N (h. 34). A'M cắt BB' tại G, A' N cắt DD' tại H, thiết diện là ngũ giác A'GEFH.

b) Thiết diện chia hình hộp thành hai phần, gọi V_1 là thể tích phần có chứa điểm A, V_2 là thể tích phần còn lại và $V = V_1 + V_2$ là thể tích hình hộp đã cho. Ta có :



Hình 34

$V_1 = V_{A'.AMN} - V_{M.BEG} - V_{N.DHF}$. (*)

Dễ thấy $S_{AMN} = \frac{9}{8}S_{ABCD}$ nên

$V_{A'.AMN} = \frac{9}{8}V_{A'.ABCD} = \frac{9}{8}.\frac{V}{3} = \frac{3V}{8}$. Mặt khác cũng dễ thấy: $\frac{MB}{MA} = \frac{ME}{MN} = \frac{MG}{MA'} = \frac{1}{3}$

nên

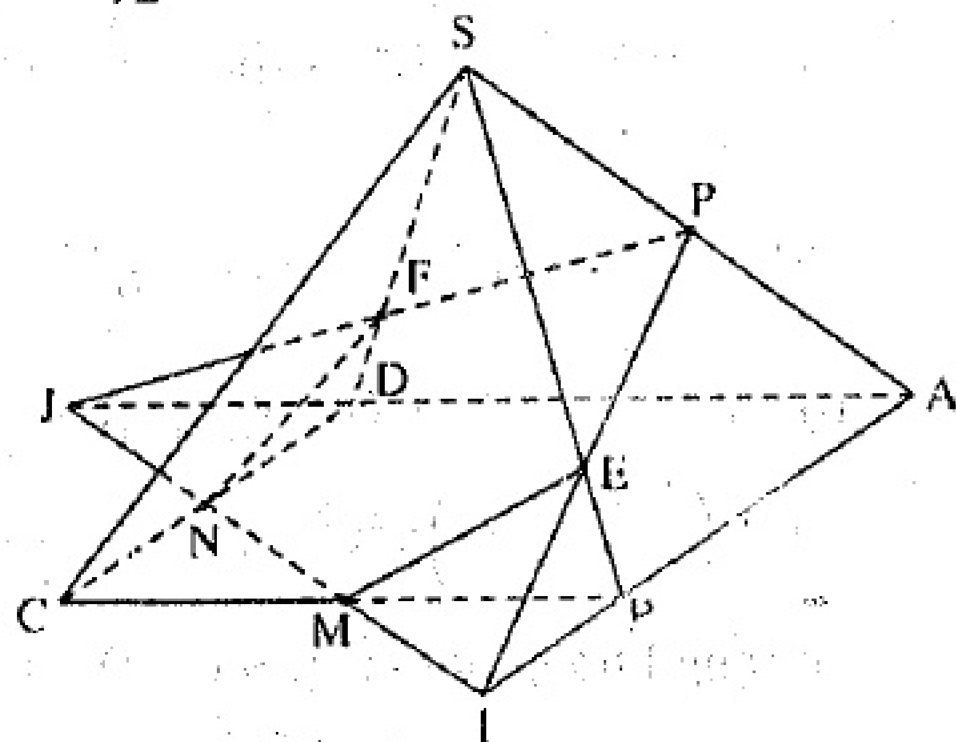
$V_{M.BEG} = \frac{1}{27}V_{M.ANA'} = \frac{1}{27}V_{A'.AMN} = \frac{1}{27}.\frac{3V}{8} = \frac{V}{72}$.

Tương tự ta cũng có : $V_{N.DHF} = \frac{V}{72}$.

Như vậy từ (*) ta có : $V_1 = \frac{3V}{8} - \frac{2V}{72} = \frac{25V}{72}$.

Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$.

11. Gọi I và J lần lượt là giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AB và AD, E là giao điểm của IP và SB, F là giao điểm của JP và SD (h. 35). Thiết diện là ngũ giác PEMNF, nó chia hình chóp S.ABCD thành hai phần, ta gọi V_1 là thể tích phần có chứa điểm A. Ta có :



Hình 35

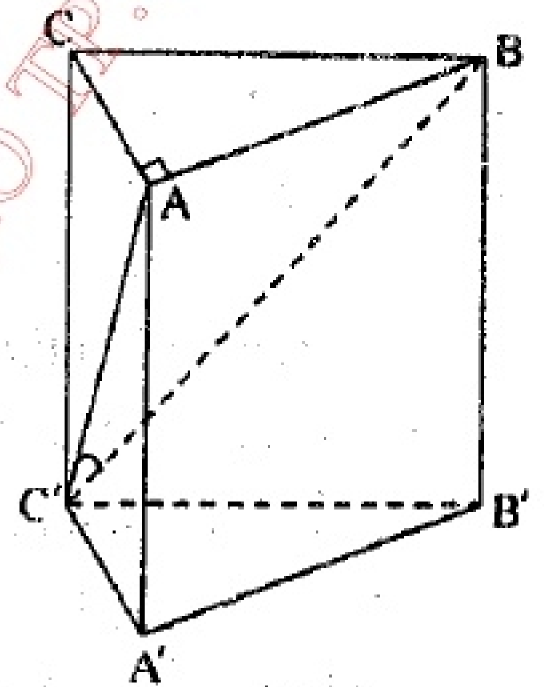
$V_{EBIM} = \frac{IM}{IJ}.\frac{IB}{IA}.\frac{IE}{IP}V_{P.AIJ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}V_{PAIJ} = \frac{1}{18}V_{PAIJ}$;

LTĐH CẤP TỐC TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

tương tự : $V_{FDJN} = \frac{1}{18} V_{PAIJ}$. Vậy: $V_1 = V_{P.AIJ} - V_{EBIM} - V_{FDJN} = \frac{8}{9} V_{PAIJ}$.

Hình chóp P.AIJ có diện tích đáy AIJ bằng $\frac{9}{8}$ diện tích đáy ABCD của hình chóp S.ABCD, còn đường cao của hình chóp P.AIJ bằng nửa đường cao của chóp S.ABCD. Vì thế $V_{PAIJ} = \frac{9}{16} V_{SABCD}$. Từ đó ta có $V_1 = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$. Suy ra thiết diện chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.



Hình 36

12. a) Theo giả thiết AB cùng vuông góc với AA' và AC nên vuông góc với mp(AA'C'C) (h. 36). Suy ra $\widehat{AC'B} = 30^o$. Tam giác ABC' vuông tại A nên $AC' = AB\cot 30^o = AB\sqrt{3}$, mà $AB = AC\tan 60^o = b\sqrt{3}$ nên $AC' = 3b$.

b) Trong tam vuông ACC' :

$CC'^2 = C'A^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$, vậy $CC' = 2b\sqrt{2}$.

Từ đó ta có : $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} CC'.AB.AC = \sqrt{6}\, b^3$.

§3. Toán tổng hợp

1. Cho hình tứ diện ABCD với DA = a, DB = b, DC = c, $\widehat{ADB} = 90^o$, $\widehat{ADC} = \widehat{BDC} = 60^o$.

   a) Tính thể tích tứ diện ABCD.

   b) Tính khoảng cách từ điểm A tới mp(BCD).

2. Cho tứ diện OABC với OA = a, OB = b, OC = c, $\widehat{AOB} = 30^o$, $\widehat{BOC} = 45^o$, $\widehat{COA} = 60^o$. Kẻ $BH \perp mp(OAC)$, $BI \perp OA$, $BJ \perp OC$.

   a) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OIJ.

   b) Tính thể tích tứ diện OABC.

3. Tính thể tích khối chóp O.ABC biết $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \alpha$ (với $0^o < \alpha < 120^o$) và OA = a, OB = b, OC = c.

LTĐH-CĐ TOÁN - VẬT LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. Cho một lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Một mặt phẳng đi qua một cạnh đáy và trung điểm của đoạn thẳng nối tâm hai đáy. Hãy tính diện tích của thiết diện tạo thành.

5. Hãy tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ biết $AB = a, A_1B_1 = b < a$ và đường thẳng A_1C tạo với đáy góc 30^o.

6. Tính thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \alpha$ $(45^o < \alpha < 135^o)$.

7. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' biết mặt bên BCC'B' có diện tích S và khoảng cách từ AA' tới mp(BCC'B') bằng d.

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CC', A'D'.

   a) Chứng minh rằng $B'D \perp mp(MNP)$.

   b) Tính thể tích tứ diện DMNP.

   c) Tính thể tích tứ diện CMNP.

9. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết rằng AM = x và CP = y và $x + y < a$. Tính thể tích hai phần của khối lập phương được phân chia bởi mp (α).

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Gọi CH là đường cao của tứ diện ABCD (h. 37).

Kẻ $HA' \perp DA$, $HB' \perp DB$, ta có

$$DA' = DB' = DC\cos 60^o = \frac{c}{2}.$$

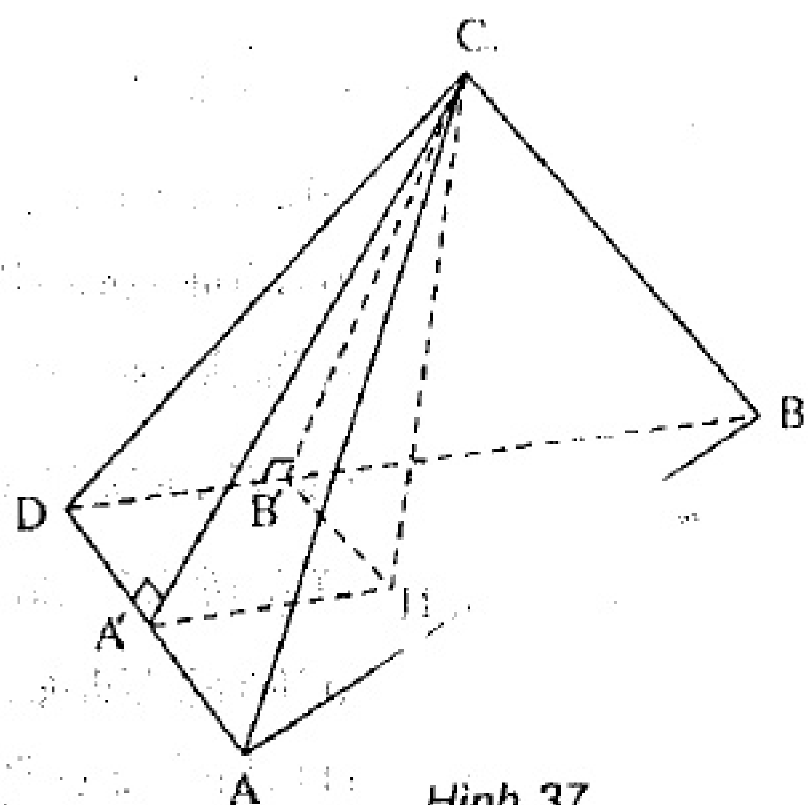
Như vậy DA'HB' là hình vuông, do đó

$$DH = DA'\sqrt{2} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác DHC vuông ở H nên

$$CH = \sqrt{DC^2 - DH^2} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{DAB}.CH = \frac{abc\sqrt{2}}{12}.$

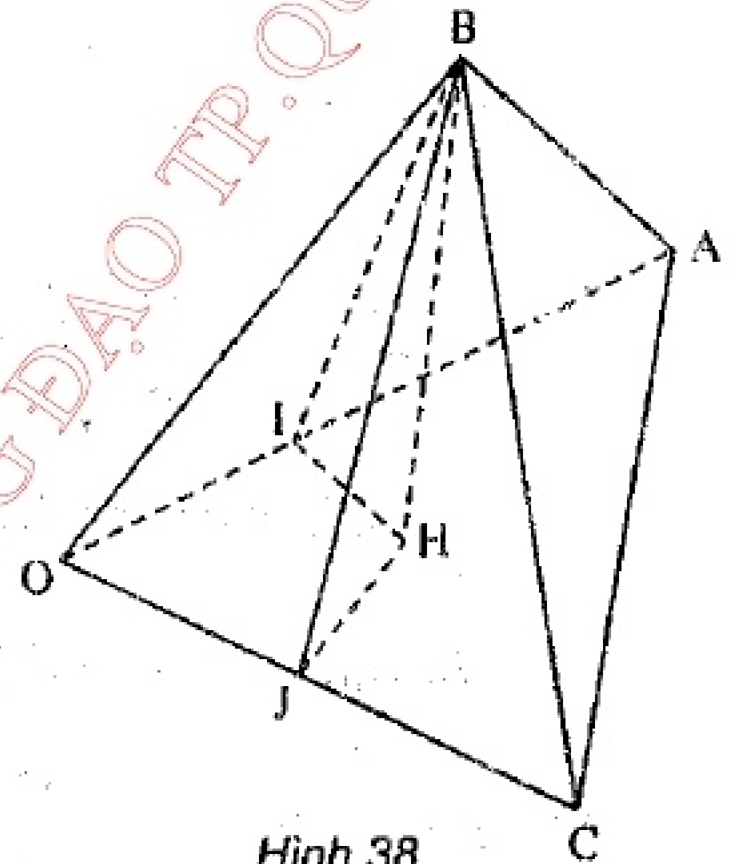


Hình 37

b) Tam giác CDB có diện tích : $S_{BCD} = \frac{1}{2}DB.DC\sin 60^o = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$. Gọi h là khoảng cách từ điểm A tới mp(BCD) thì $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.h$, suy ra

$$h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{abc\sqrt{2}}{4.\frac{bc\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

2. (h.38) a) Ta có :



Hình 38

$$OI = OB\cos\widehat{AOB} = \frac{b\sqrt{3}}{2},$$

$$OJ = OB\cos\widehat{BOC} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

$$IJ^2 = OI^2 + OJ^2 - 2OI.OJ\cos\widehat{IOJ}$$

$$= \frac{3b^2}{4} + \frac{2b^2}{4} - 2\frac{b\sqrt{3}}{2}.\frac{b\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{b^2\left(5-\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác OIJ thì

$$2R = \frac{IJ}{\sin\widehat{IOJ}} = \frac{b\sqrt{5-\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{b\sqrt{5-\sqrt{6}}}{2\sqrt{3}}.$$

b) Chú ý rằng $HI \perp OA$, $HJ \perp OC$ nên tứ giác OIHJ nội tiếp đường tròn đường kính OH và đó cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác OIJ, vậy OH = 2R. Trong tam giác vuông BHO ta có

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = b^2 - \frac{b^2\left(5-\sqrt{6}\right)}{3} = \frac{b^2\left(\sqrt{6}-2\right)}{3}.$$

Thể tích tứ diện OABC là

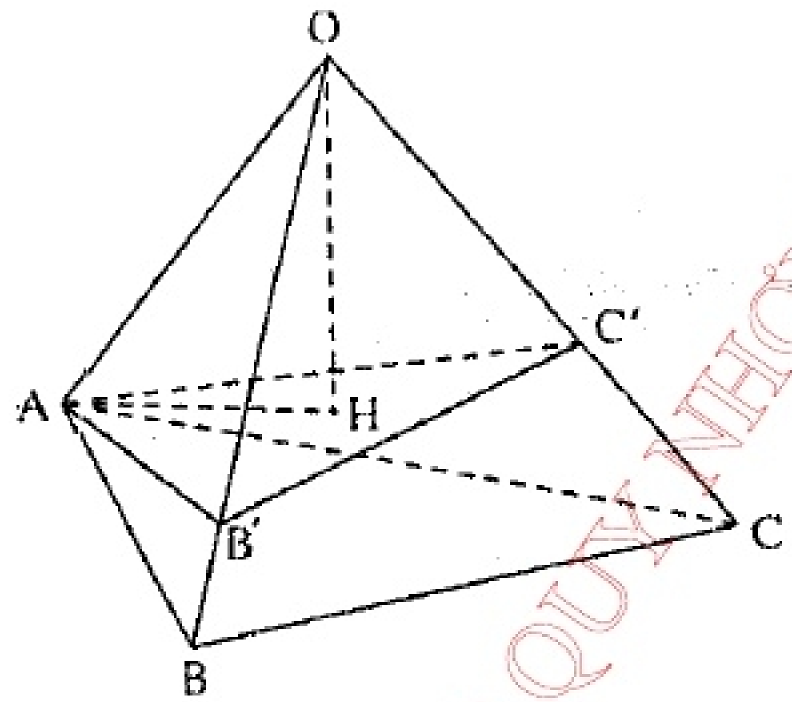
$$V = \frac{1}{3}S_{OAC}.BH = \frac{1}{6}OA.OC\sin 60^o.BH$$

$$= \frac{1}{6}ac\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{b\sqrt{\sqrt{6}-2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}abc\sqrt{\sqrt{6}-2}.$$

LTĐH-CĐ TOÁN- LIÊN HỆ 0908 TRẦN HÙNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. Trên hai tia OB và OC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho OB' = OC' = OA = a (h. 39), ta được hình chóp đều O.AB'C' có cạnh bên bằng a và cạnh đáy $AB' = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Gọi H là tâm tam giác đều AB'C' thì $AH = \frac{AB'\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}a\sin\frac{\alpha}{2}$. Bởi vậy hình chóp có đường cao là



Hình 39

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Tam giác đều AB'C' có diện tích bằng $S = \frac{AB'^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Vậy $V_{O.AB'C'} = \frac{1}{3}a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

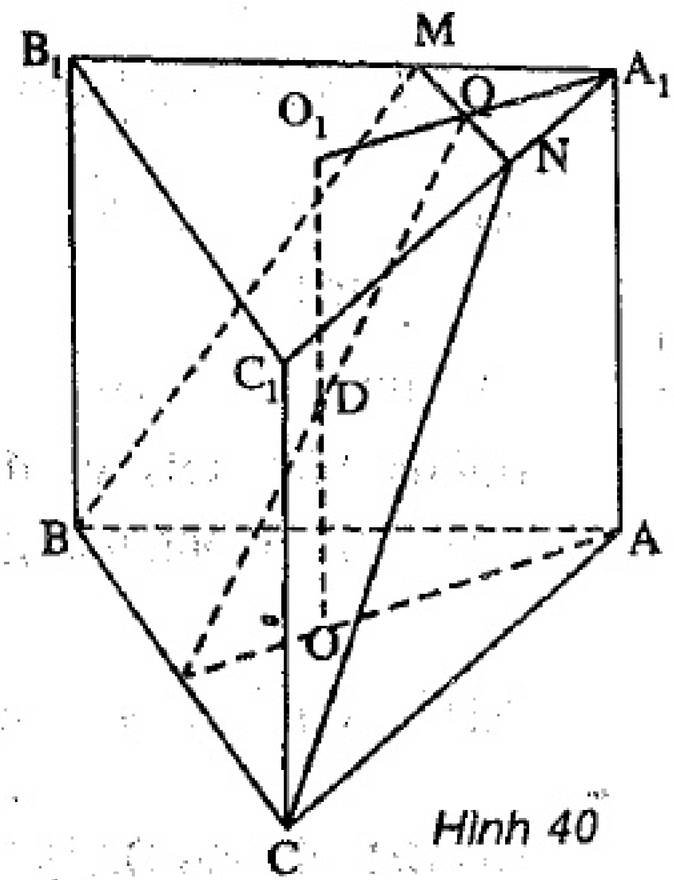
Từ đó ta có : $V_{O.ABC} = \frac{OB}{OB'}\cdot\frac{OC}{OC'}\cdot V_{O.AB'C'} = \frac{1}{3}abc\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

4. Giả sử $ABC.A_1B_1C_1$ là lăng trụ đã cho (h. 40). Mặt phẳng đi qua cạnh đáy BC và trung điểm D của trục OO_1 cắt mp$(A_1B_1C_1)$ theo đường thẳng song song với B_1C_1 và đi qua trung điểm Q của A_1O_1. Đường thẳng đó cắt A_1B_1 và A_1C_1 lần lượt tại M và N. Thiết diện là hình thang cân BCNM.

Góc giữa mp(BCNM) và mp$(A_1B_1C_1)$ là $\alpha = \widehat{DQO_1}$, mà $\tan\alpha = \frac{DO_1}{QO_1} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$

nên $\alpha = 60^0$. Hình chiếu của hình thang BCNM trên mặt đáy $A_1B_1C_1$ có diện tích

$$S' = \frac{8}{9}S_{A_1B_1C_1} = \frac{2}{9}a^2\sqrt{3}.$$



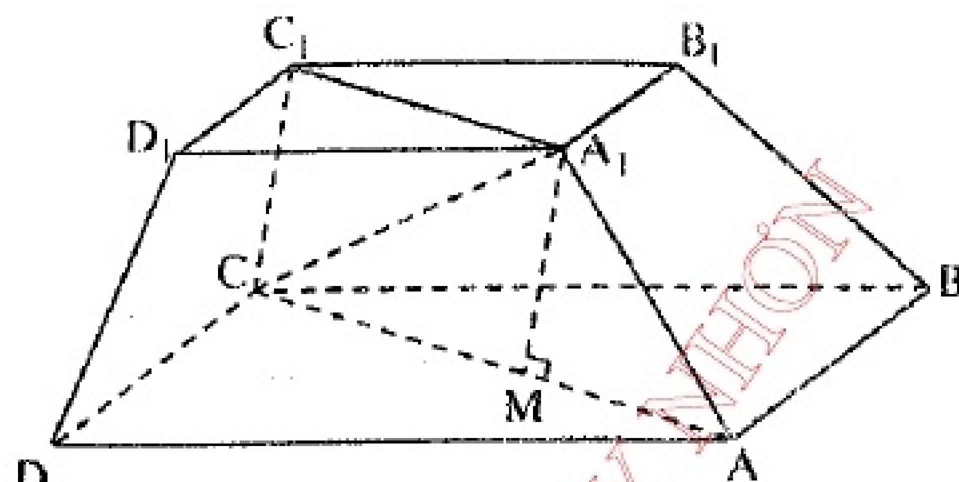
Hình 40

Vậy $S_{BCNM} = \frac{S'}{\cos 60^0} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

5. Gọi A_1M là đường cao của tam giác A_1AC (đồng thời là đường cao của hình chóp cụt) (h. 41). Trong hình thang cân A_1C_1CA ta có :



Hình 41

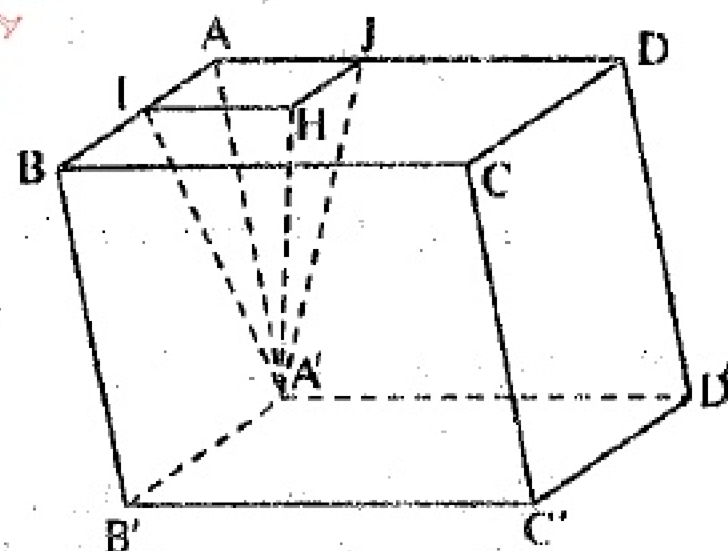
$$CM = \frac{1}{2}\left(AC + A_1C_1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Trong tam giác vuông A_1MC

ta có: $A_1M = MC\tan\widehat{A_1CM} = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}(a+b).$

Vậy $V = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)\frac{\sqrt{6}}{6}(a+b) = \frac{\sqrt{6}}{18}(a+b)\left(a^2+b^2+ab\right).$

6. Kẻ $A'H \perp mp(ABCD), HI \perp AB, HJ \perp AD$ (h. 42) thì $A'I \perp AB$ nên



Hình 42

$AI = AA'\left|\cos\widehat{A'AB}\right| = c\left|\cos\alpha\right|,$

tương tự, $A'J \perp AD$ nên

$AJ = AA'\cos\widehat{A'AD} = c\left|\cos\alpha\right|.$

Như vậy AIHJ là hình vuông nên $AH = AI\sqrt{2} = \sqrt{2}c\left|\cos\alpha\right|.$

Tam giác A'AH vuông tại H nên:

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$

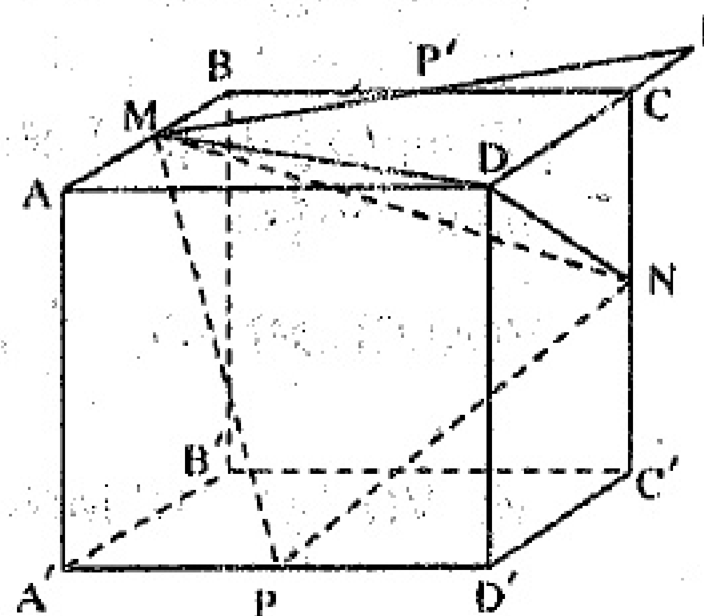
7. *Hướng dẫn :* Khối chóp A.BCC'B' có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng d.

Đáp số : $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{Sd}{2}.$

8. a) Dễ dàng tính được

$$MD = MB' = ND = NB' = PD = PB' = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

(h.43). Như vậy cả ba điểm M, N, P cùng cách đều hai điểm D và B', suy ra M, N, P nằm trên mặt phẳng trung trực



Hình 43

LTĐH-CĐ TOÁN- LÊ HOÀ 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

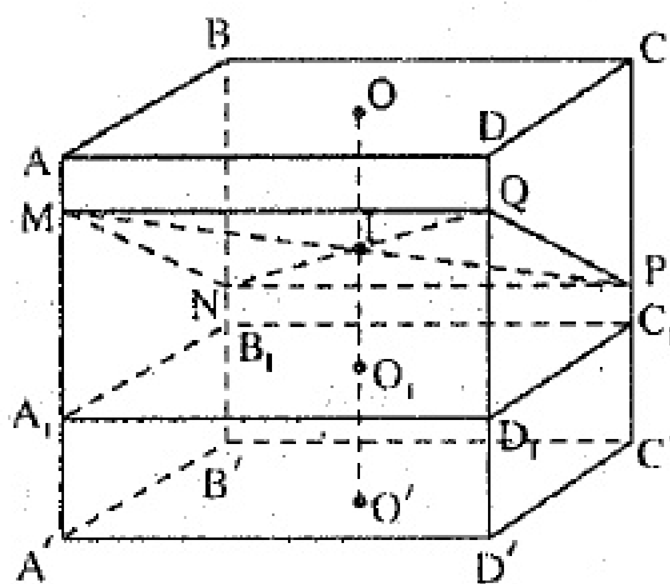
của đoạn thẳng B'D, tức là mp(MNP) vuông góc với B'D tại trung điểm O của đoạn thẳng B'D.

b) MNP là tam giác đều, $MN = NP = PN = \sqrt{PA'^2 + A'A^2 + AM^2}$ $= \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy nó có diện tích là $s = \frac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

Khoảng cách từ D tới mp(MNP) là $DO = \frac{B'D}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tứ diện DMNP có thể tích $V = \frac{1}{3}s.DO = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{16}$.

c) Gọi P' là trung điểm cạnh BC và I là giao điểm của hai đường thẳng MP' và CD. Khi đó hiển nhiên P' thuộc mp(MNP) và do đó I là giao điểm của DC và mp(MNP). Vì $CI = \frac{a}{2}$ nên $CI = \frac{DI}{3}$. Suy ra nếu h là khoảng cách từ C tới mp(MNP) thì $h = \frac{DO}{3}$. Vậy thể tích của tứ diện CMNP bằng $\frac{1}{3}$ thể tích tứ diện DMNP, tức là bằng $\frac{a^3}{16}$.

9. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABCD và A'B'C'D' (h.44). Tứ giác MNPQ là hình bình hành có tâm I nằm trên đoạn thẳng OO'. Trong hình thang ACPM ta có $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{x + y}{2} < \frac{a}{2}$.



Hình 44

Ta gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua điểm I thì $OO_1 = 2OI < a = OO'$, như vậy điểm O_1 nằm trong đoạn thẳng OO'. Qua O_1 vẽ mặt phẳng song song với mp(ABCD), nó cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Khi đó I là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Vì mp(α) đi qua I nên nó chia hình hộp đó thành hai phần có thể tích bằng nhau. Suy ra:

$$V(ABCD.MNPQ) = \frac{1}{2}V(ABCD.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}a^2OO_1 = \frac{1}{2}a^2(x+y)$$

và $V(A'B'C'D'.MNPQ) = a^3 - \frac{1}{2}a^2(x+y) = \frac{a^2}{2}(2a - x - y)$.

LTĐH-CĐ TOÁN - TI NGA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Chủ đề 6
MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Mặt cầu. Giao của mặt cầu và mặt phẳng. Mặt phẳng kính, đường tròn lớn. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu. Giao của mặt cầu với đường thẳng. Tiếp tuyến của mặt cầu. Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu.
2. Mặt tròn xoay. Mặt nón, giao của mặt nón với mặt phẳng. Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón, thể tích khối nón. Mặt trụ, giao của mặt trụ với mặt phẳng. Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ, thể tích khối trụ.

Các dạng toán cần luyện tập :

1. Tính diện tích mặt cầu. Tính thể tích khối cầu.
2. Tính diện tích xung quanh của hình nón, diện tích xung quanh của hình trụ. Tính thể tích khối nón tròn xoay, thể tích khối trụ tròn xoay.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

§1. Mặt cầu, khối cầu

1. Cho tứ diện OABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh A, $AB = AC = a$. Một mặt cầu tâm O bán kính R tiếp xúc với hai đường thẳng AB và AC lần lượt tại B và C.

a) Tính thể tích tứ diện OABC.

b) Mặt phẳng trung trực của OA cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu ?

2. Hình tứ diện ABCD có hai mặt ABC và DBC là những tam giác đều cạnh a và nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi (S) là mặt cầu đi qua B, C và tiếp xúc với đường thẳng AD tại A.

a) Tính bán kính mặt cầu đó.

b) Mặt phẳng (DBC) cắt mặt cầu theo một đường tròn. Tìm bán kính đường tròn đó.

3. Cho hình chóp cụt tứ giác đều ABCD. A'B'C'D' có các cạnh đáy $AB = a$, $A'B' = 2a$, và có đường cao bằng h.

a) Tính bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp cụt đó.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với OM, mặt phẳng đó cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. a) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c.

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc và có độ dài lần lượt là a, b, c.

c) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh a, đường cao DH và O là trung điểm của DH. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

5. Trong số các hình hộp nội tiếp mặt cầu bán kính R cho trước, hình hộp nào có thể tích lớn nhất ?

6. Cho hình lăng trụ đều ABC. A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

b) Gọi E là trung điểm của A'B'. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE.

7. Cho tứ diện ABCD với AB = CD = b, AC = BC = AD = BD = a.

Xác định tâm O và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

8. Cho tam giác cân ABC với góc ở đỉnh A bằng 120^o, BC = a. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại A lấy hai điểm I và J nằm về hai phía của A sao cho IBC là tam giác đều và JBC là tam giác vuông đỉnh J.

a) Chứng minh rằng các tam giác BIJ và CIJ là các tam giác vuông.

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC .

c) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC.

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = x vuông góc với đáy. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các đường thẳng SB , SD, P là giao điểm của mp(AEF) và đường thẳng SC.

a) Chứng minh rằng SC vuông góc với mp(AEF).

b) Chứng minh rằng 7 điểm A, B, C, D, E, F, P cùng nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

c) Tính thể tích hình chóp P.ABCD .

d) Cho a cố định còn x thay đổi. Tìm giá trị x sao cho thể tích hình chóp P.ABCD lớn nhất.

10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, BC = b, đường cao SA = h. Một mặt phẳng (α) đi qua CD cắt SA, SB lần lượt tại K và L.

a) Tính diện tích thiết diện KLCD theo a, b và AK = t.

b) Tính thể tích hình chóp S.KLCD.

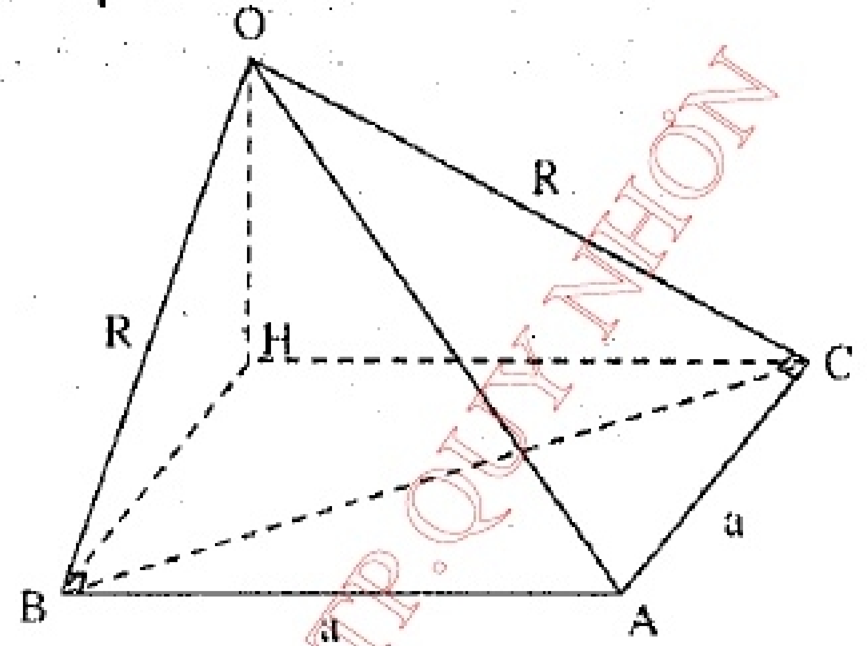
c) Tìm giá trị t sao cho mp(α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

d) Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ACDK.

LTĐH-ĐỀ TOÁN - LÍ - HÓA 100đ TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

1. a) Vì mặt cầu tâm O tiếp xúc với AB và AC lần lượt tại B và C nên $OB \perp AB$ và $OC \perp AC$ (h. 45). Bởi vậy nếu ta kẻ $OH \perp mp(ABC)$ thì $HB \perp AB$ và $HC \perp AC$, do đó ABHC là hình vuông.

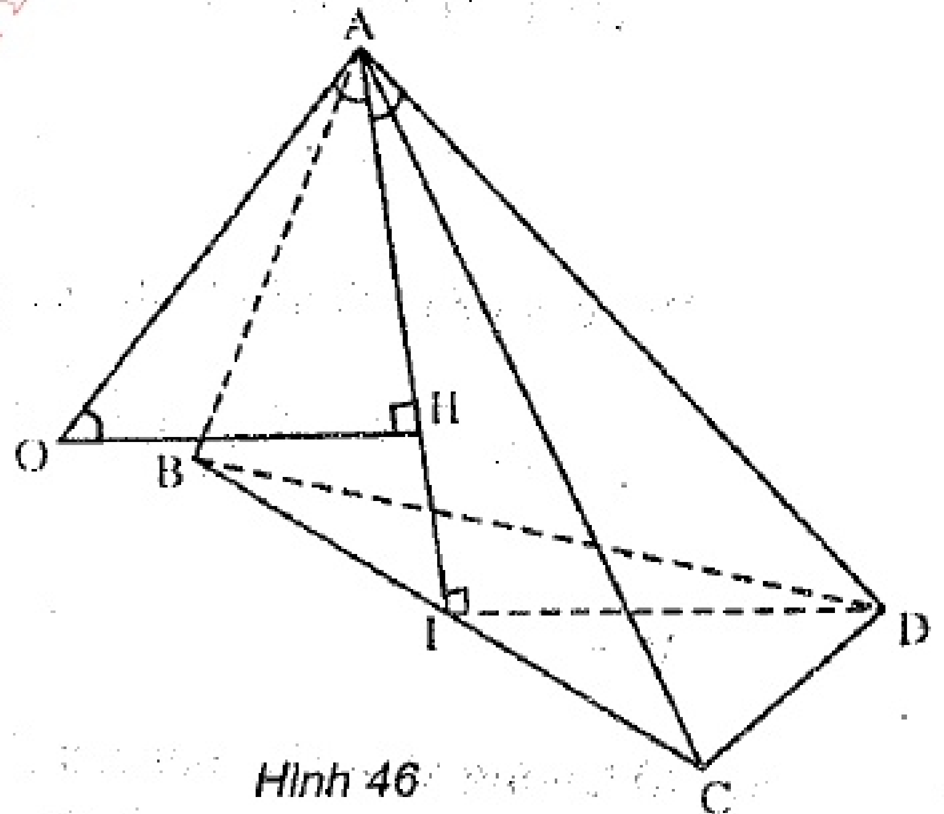


Hình 45

Ta có $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{R^2 - a^2}$ (với điều kiện $R > a$). Thể tích tứ diện OABC là $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.OH = \frac{1}{6}a^2\sqrt{R^2 - a^2}$.

b) Ta có $OA = \sqrt{OB^2 + BA^2} = \sqrt{R^2 + a^2}$. Khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng trung trực của OA là $d = \frac{OA}{2} = \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{2}$. Vậy đường tròn giao tuyến có bán kính là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3R^2 - a^2}$.

2. a) Gọi H là trọng tâm tam giác ABC (h.46). Nếu O là tâm của mặt cầu (S) thì vì (S) đi qua ba điểm A, B, C nên $OH \perp mp(ABC)$. Vì (S) tiếp xúc với AD tại A nên $OA \perp AD$. Gọi I là trung điểm của BC thì AI = DI và góc AID vuông nên $\widehat{DAI} = 45^o$, suy ra $\widehat{OAH} = 45^o$, vậy OAH là tam giác vuông cân đỉnh H. Bán kính mặt cầu (S) là :



Hình 46

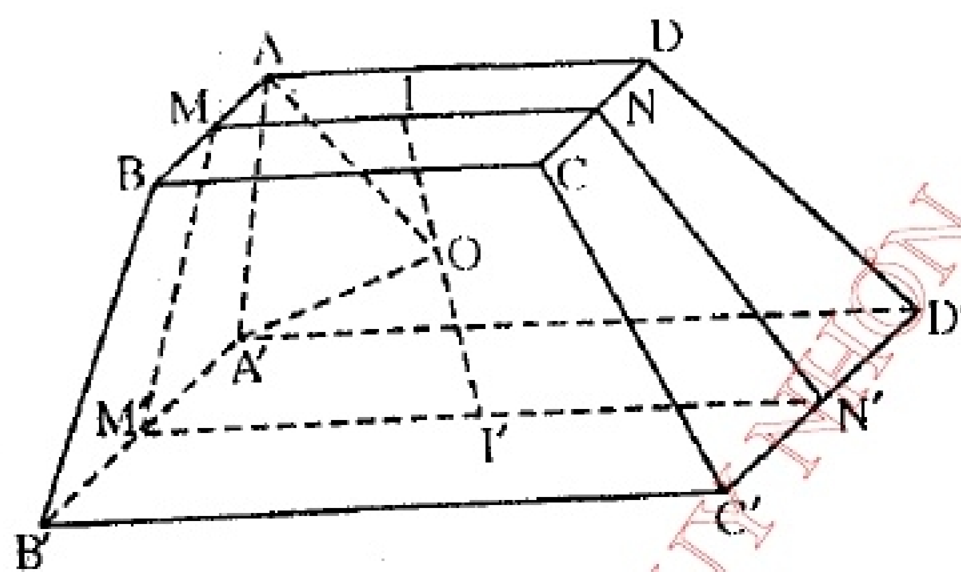
$$R = OA = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

b) Vì OH // mp(DBC) nên khoảng cách từ O tới mp(DBC) bằng khoảng cách từ H tới mặt phẳng đó, tức là bằng $HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Vậy đường tròn giao tuyến có bán kính là $r = \sqrt{R^2 - HI^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{51}}{6}$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. a) Gọi I và I' là tâm của các hình vuông ABCD và A'B'C'D' thì mặt cầu ngoại tiếp (S) có tâm O nằm trên đường thẳng II' (h. 47) sao cho $OA = OA'$.



Hình 47

Đặt $IO = x$ thì $OI' = |II' - x| = |h - x|$. Bởi vậy từ $OA^2 = OA'^2$ ta có

$$AI^2 + IO^2 = A'I'^2 + I'O^2 \text{ hay } \frac{a^2}{2} + x^2 = 2a^2 + (h-x)^2.$$

Suy ra $x = \dfrac{3a^2 + 2h^2}{4h}$.

Bán kính mặt cầu (S) là :

$$R = OA = \sqrt{AI^2 + IO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \left(\frac{3a^2 + 2h^2}{4h}\right)^2} = \frac{\sqrt{9a^4 + 4h^4 + 20a^2h^2}}{4h}.$$

b) Khoảng cách từ tâm O tới mp(α) là $d = OM$ và ta có :

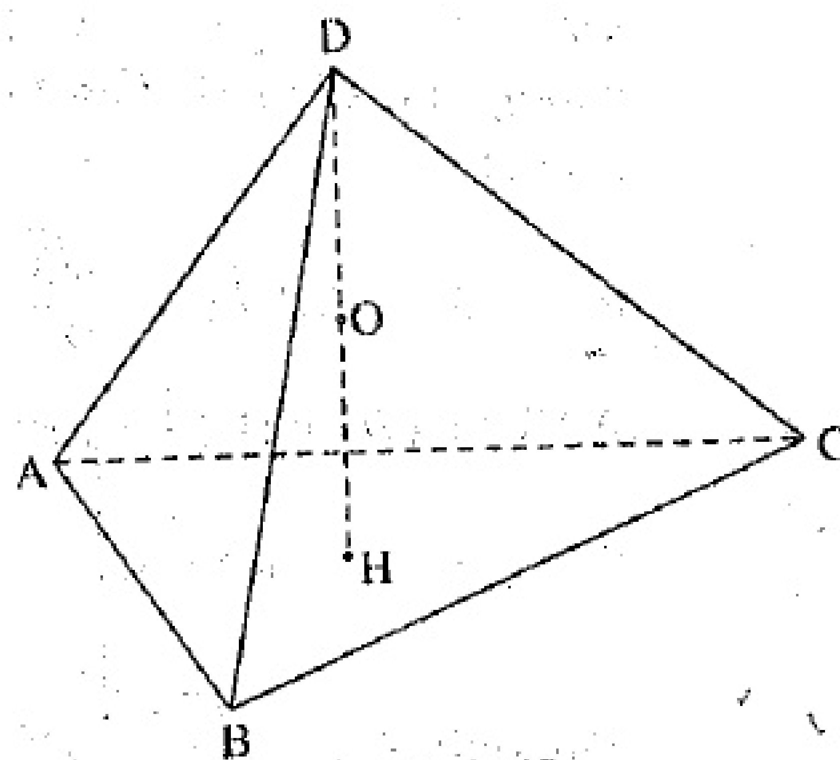
$$d^2 = OM^2 = OI^2 + IM^2 = \left(\frac{3a^2 + 2h^2}{4h}\right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Bởi vậy nếu r là bán kính đường tròn giao tuyến thì

$$r^2 = R^2 - d^2 = \frac{a^2}{2} + \left(\frac{3a^2 + 2h^2}{4h}\right)^2 - \left(\frac{3a^2 + 2h^2}{4h}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

Vậy $r = \dfrac{a}{2}$.

4. a) Đường kính của mặt cầu là các đường chéo của hình hộp chữ nhật nên có độ dài là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, vậy mặt cầu có bán kính $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 48

b) Ta dựng hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD thì đó là hình hộp chữ nhật. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD cũng

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN
http://sachviet.edu.vn

là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp nên có bán kính là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

c) Ta có (h. 48): $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OH = \frac{1}{2}DH = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 - HA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

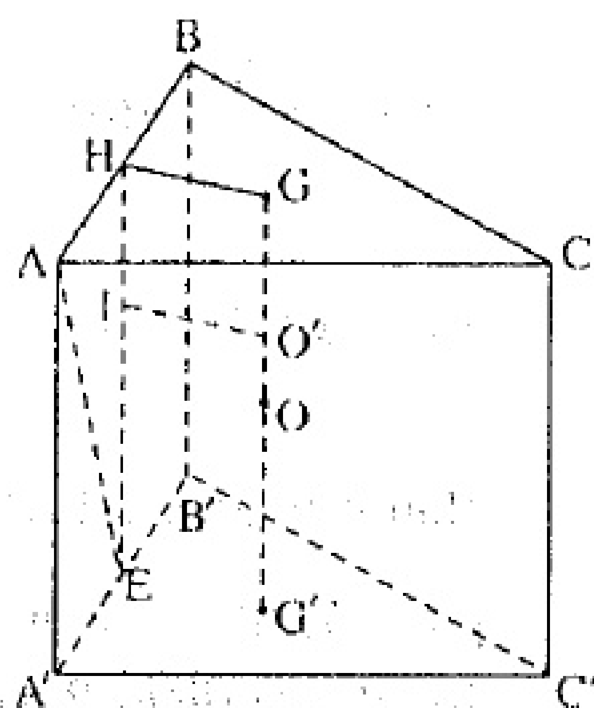
Vậy $OA = OB = OC = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và theo câu b), bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là : $R = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

5. Hình hộp nội tiếp mặt cầu phải là hình hộp chữ nhật, và các đường chéo của nó là đường kính của mặt cầu. Bởi vậy nếu gọi x, y, z là ba kích thước của nó thì ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$. Thể tích hình hộp là $V = xyz$. Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ không đổi nên tích $x^2y^2z^2$ lớn nhất khi $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Vậy khi đó hình hộp là hình lập phương.

6. a) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác đều ABC và A'B'C' (h. 49) thì tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là trung điểm O của đoạn thẳng GG', và bán kính mặt cầu là $R = OA$. Ta có

$$R^2 = OA^2 = OG^2 + GA^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{12}.$$

Vậy mặt cầu có diện tích $S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$.



Hình 49

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân EAB thì I nằm trên đường cao EH, trục của đường tròn đó là đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABB'A') tại I, chú ý rằng $\Delta // CH$ nên Δ cắt GG' tại điểm O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE.

Vì $IE^2 = IA^2$ nên $IE^2 = AH^2 + (EH - IE)^2 = AH^2 + EH^2 + IE^2 - 2EH.EI$

hay $0 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2a.EI$. Vậy $EI = \frac{5a}{8}$. Bán kính mặt cầu này là

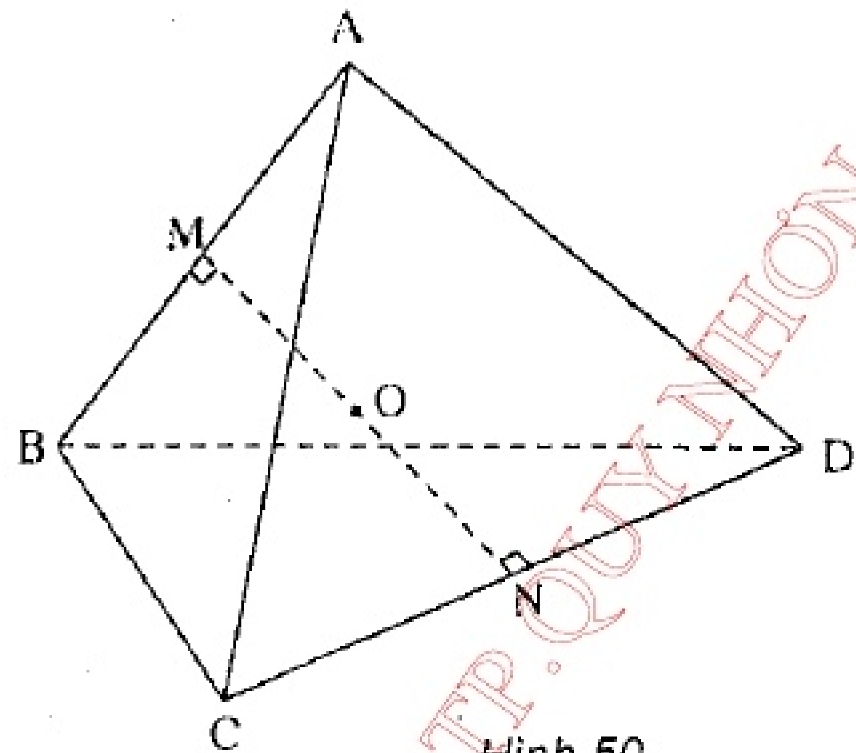
$$R' = O'E = \sqrt{O'I^2 + EI^2} = \sqrt{GH^2 + EI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{5a}{8}\right)^2} = \frac{a\sqrt{91}}{8\sqrt{3}}.$$

LTĐH CĐ TOÁN - LÊ HỒNG ĐỨC (1000B) TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

7. *Hướng dẫn* : Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD (h. 50), O là trung điểm của MN thì $OA = OB = OC = OD$. Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, và bán kính của nó là $R = OA$.

Áp dụng định lí Py-ta-go tính được $R = \dfrac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2\sqrt{2}}$.



Hình 50

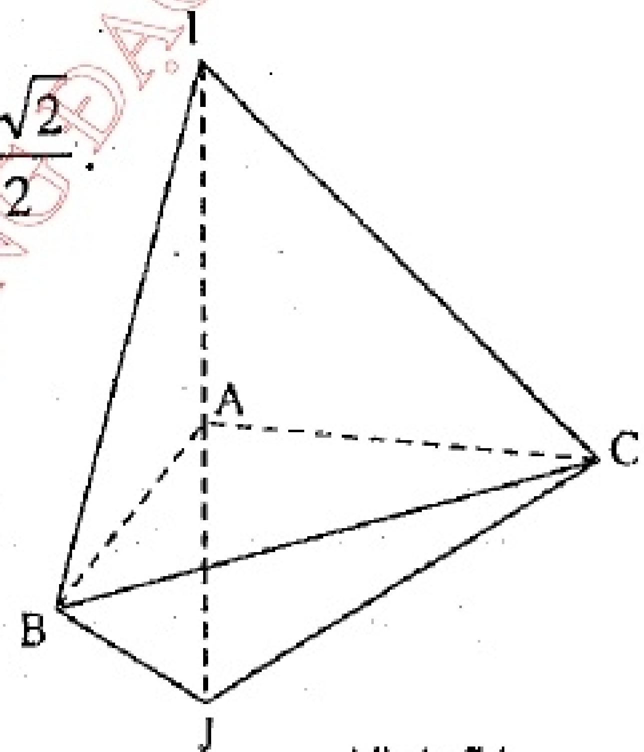
8. a) Tam giác đều IBC có $BI = CI = BC = a$ (h. 51).

Tam giác vuông cân JBC có $BJ = CJ = \dfrac{BC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra, $BA = CA = \dfrac{BC}{2\cos 30^o} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Bởi vậy :

$AI = \sqrt{BI^2 - BA^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$,

$AJ = \sqrt{BJ^2 - BA^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.



Hình 51

Như vậy ta có $AI.AJ = \dfrac{2a^2}{6} = \dfrac{a^2}{3} = BA^2$. Suy ra tam giác BIJ vuông ở B, tam giác CIJ bằng tam giác BIJ nên cũng vuông tại C.

b) Vì hai điểm B và C cùng nhìn đoạn thẳng IJ dưới góc vuông nên mặt cầu đường kính IJ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC. Bán kính của nó là:

$$R = \frac{IJ}{2} = \frac{1}{2}(AI + AJ) = \frac{3a}{2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

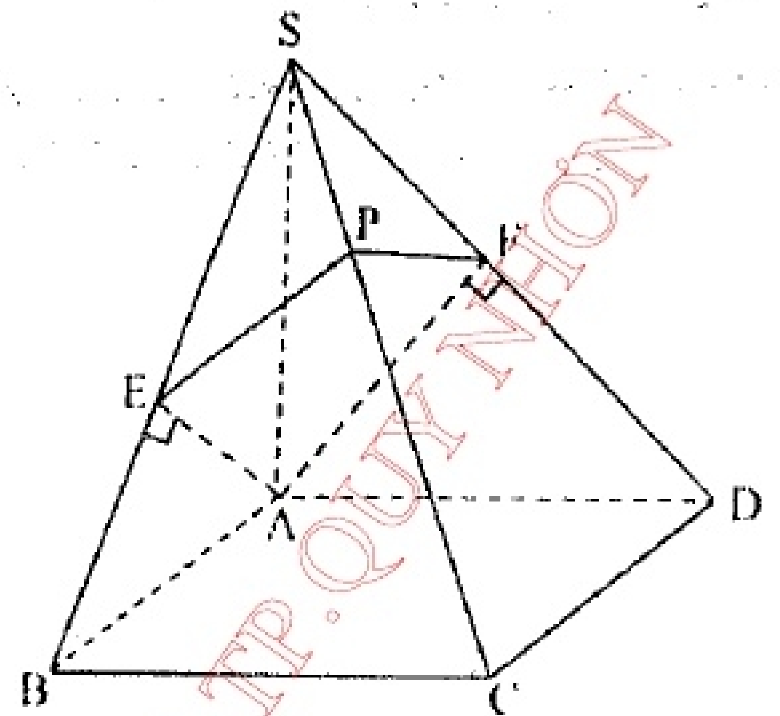
c) Lấy điểm A' đối xứng với điểm A qua trung điểm của BC thì A' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vậy đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại A' là trục của đường tròn đó, nó cắt mặt phẳng trung trực của AI tại điểm O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC. Bán kính R' của mặt cầu này là :

$$R' = OA = \sqrt{OA'^2 + AA'^2} = \sqrt{\frac{AI^2}{4} + AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

LTĐH CẤP TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

9. a) (h.52) Vì $CD \perp mp(SAD)$ nên $AF \perp CD$, mặt khác $AF \perp SD$, suy ra $AF \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AE \perp SC$. Vậy $SC \perp mp(AEF)$.



Hình 52

b) Vì $AF \perp mp(SCD)$ nên $AF \perp FC$ hay $\widehat{AFC} = 90^o$, tương tự ta có $\widehat{AEC} = 90^o$. Ngoài ra hiển nhiên $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^o$. Vậy 7 điểm A, B, C, D, E, F, P nằm trên mặt cầu đường kính AC. Bán kính mặt cầu là

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Vì AP là đường cao của tam giác vuông SAC nên

$\frac{CP}{CS} = \frac{CP.CS}{CS^2} = \frac{AC^2}{CS^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + x^2}$. Gọi PP' là đường cao của hình chóp.

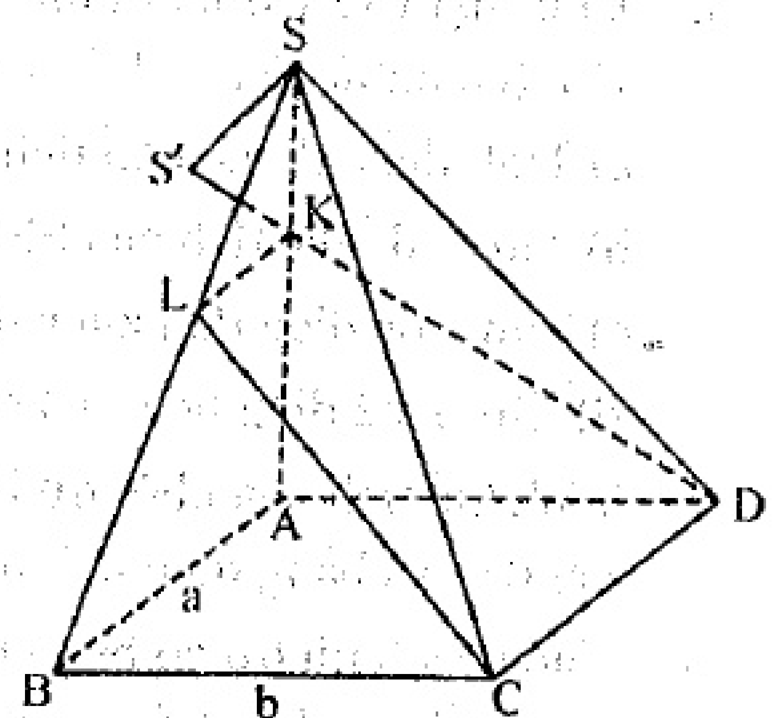
P.ABCD thì PP'// SA nên $\frac{PP'}{SA} = \frac{CP}{CS} = \frac{2a^2}{2a^2 + x^2}$, suy ra $PP' = \frac{2a^2x}{2a^2 + x^2}$.

Vậy $V_{P.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.PP' = \frac{2a^4x}{3\left(2a^2 + x^2\right)}$.

d) $V_{P.ABCD}$ lớn nhất khi hàm số $f(x) = \frac{x}{2a^2 + x^2}$ với $x > 0$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có $f'(x) = \frac{2a^2 - x^2}{(2a^2 + x^2)^2}$ và hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = a\sqrt{2}$.

10. a) Thiết diện KLCD là hình thang với hai góc vuông tại K và D (h.53).

Ta có $\frac{KL}{AB} = \frac{SK}{SA}$ hay $\frac{KL}{a} = \frac{h - t}{h}$, vậy $KL = \frac{a(h - t)}{h}$. Ngoài ra $DK = \sqrt{AD^2 + AK^2} = \sqrt{b^2 + t^2}$. Ta suy ra diện tích thiết diện KLCD là



Hình 53

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 0000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$s=\frac{1}{2}(KL+DC)DK=\frac{1}{2}\left(\frac{a(h-t)}{h}+a\right)\sqrt{b^2+t^2}=\frac{a(2h-t)\sqrt{b^2+t^2}}{2h}.$$

b) Gọi S' là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng DK : $SS'\perp DK$. Vì $SS'\perp KL$ (do $KL\perp mp(SAD)$ nên SS' là đường cao của hình chóp S.KLCD.

Từ hai tam giác vuông đồng dạng S'KS và AKD ta suy ra $\frac{SS'}{AD}=\frac{SK}{DK}$ hay

$\frac{SS'}{b}=\frac{h-t}{\sqrt{b^2+t^2}}$, vậy $SS'=\frac{b(h-t)}{\sqrt{b^2+t^2}}$. Như vậy :

$$V_{S.KLCD}=\frac{1}{3}S_{KLCD}.SS'=\frac{a(2h-t)\sqrt{b^2+t^2}}{6h}.\frac{b(h-t)}{\sqrt{b^2+t^2}}=\frac{ab(2h-t)(h-t)}{6h}.$$

c) $mp(\alpha)$ chia hình chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau khi và chỉ khi:

$V_{S.KLCD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ hay $\frac{ab(2h-t)(h-t)}{6h}=\frac{abh}{6}\Leftrightarrow t^2-3ht+h^2=0$.

Vì $0<t<h$ nên ta được $t=\frac{(3-\sqrt{5})h}{2}$.

d) Vì $\widehat{CAK}=\widehat{CDK}=90^o$ nên mặt cầu đường kính CK đi qua các đỉnh của tứ diện ACDK. Bán kính của mặt cầu đó là : $R=\frac{KC}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+t^2}}{2}$.

§2. Mặt trụ, khối trụ

1. Cho mặt cầu (S) bán kính R. Một hình trụ có đường cao 2x nội tiếp mặt cầu (S) (có nghĩa là hai đường tròn đáy hình trụ nằm trên mặt cầu).
   a) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ theo R và x.
   b) Tìm x để thể tích của hình trụ lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
   c) Tìm x để diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
   d) Tìm x để diện tích mặt cầu bằng hai lần diện tích xung quanh của hình trụ.
2. Tính thể tích của khối trụ biết rằng diện tích xung quanh của nó bằng diện tích hai đáy và bằng diện tích mặt cầu bán kính R.
3. Cho một hình trụ có bán kính là R và chiều cao bằng h. Hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho độ dài AB = d không đổi.

LTĐH TOÁN - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

a) Tính thể tích của tứ diện OO'AB, trong đó O và O' là tâm của các đường tròn đáy.

b) Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

c) Gọi IJ là đường vuông góc chung của AB và OO' với $I \in AB$, $J \in OO'$. Tìm quỹ tích điểm I khi A, B thay đổi.

4. Cắt khối trụ bằng một mặt phẳng (α) song song với trục OO' của khối trụ, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh a. Biết rằng khoảng cách từ OO' tới $mp(\alpha)$ bằng d. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

5. Cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, BC = b. Quay hình chữ nhật đó quanh đường thẳng AB ta được hình trụ T_1, và quay quanh đường thẳng BC ta được hình trụ T_2.

a) So sánh diện tích xung quanh của T_1 và T_2.

b) Tính tỉ số thể tích của T_1 và T_2.

6. Một hình chữ nhật có diện tích S quay quanh một đường trung bình của nó (đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện) tạo thành hình trụ (T).

a) Tính diện tích xung quanh của (T).

b) Hãy tính thể tích V của (T) nếu chu vi của hình chữ nhật là 4p.

c) Hãy tính thể tích V của (T) nếu hình chữ nhật đã cho là hình vuông.

7. Cho hình (H) gồm một hình vuông bỏ đi hình tròn nội tiếp. Quay (H) quanh đường thẳng trung trực của một cạnh hình vuông. Tính thể tích V' của hình tròn xoay tạo thành nếu biết thể tích khối cầu là V.

8. Cho hình trụ có bán kính bằng R. Gọi AB và CD là hai đường kính của hai đường tròn đáy. Tính thể tích của hình trụ đó nếu ABCD là tứ diện đều.

9. Cho hình trụ (T) có thiết diện đi qua trục là hình vuông, và cho mặt cầu (S) có tâm trùng với tâm của hình vuông đó. Chứng minh rằng nếu diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng diện tích mặt cầu (S) thì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt đáy của hình trụ, đồng thời tiếp xúc với mọi đường sinh của hình trụ.

10. Tìm thể tích của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

Chú ý : Một hình trụ (T) gọi là ngoại tiếp hình lăng trụ (L) nếu các đáy của (T) là các đường tròn ngoại tiếp đáy của (L).

11. Cho một hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có chiều cao a, đáy ABCD là hình thang cân với $AB = 2a$, $CD = 4a$, $BC = AD = 3a$.

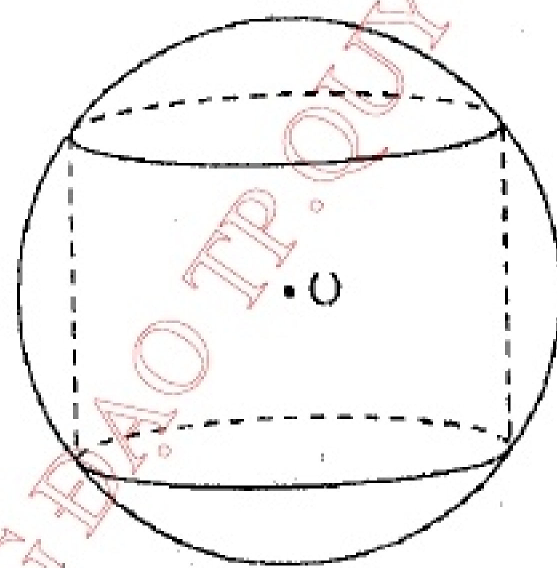
LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 10000 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN
http://sachviet.edu.vn

a) Chứng tỏ rằng có hình trụ (T) nội tiếp hình lăng trụ (tức là : các đáy của (T) là các đường tròn nội tiếp đáy của hình lăng trụ đã cho).

b) Tính thể tích và diện tích toàn phần của (T).

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Hai mặt đáy của hình trụ song song với nhau và tâm O của mặt cầu (S) cách đều hai mặt đó một khoảng cách x (h. 54).



Hình 54

Vậy bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Từ đó suy ra thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ lần lượt là :

$V = \pi r^2.2x = 2\pi x(R^2 - x^2)$

và $S_{xq} = 2\pi r.2x = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$.

b) Xét hàm số $f(x) = x(R^2 - x^2)$ với $0 < x < R$.

Ta có $f'(x) = R^2 - 3x^2$ và $f'(x) = 0$ khi $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, $f'(x) > 0$ khi $0 < x < \frac{R\sqrt{3}}{3}$, $f'(x) < 0$ khi $\frac{R\sqrt{3}}{3} < x < R$. Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Khi đó *V* lớn nhất và có giá trị $\max(V) = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

c) Ta có :

$$S_{xq} = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{x^2(R^2 - x^2)} \leq 4\pi\frac{x^2 + (R^2 - x^2)}{2} = 2\pi R^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = R^2 - x^2$ hay $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Vậy $\max S_{xq} = 2\pi R^2$.

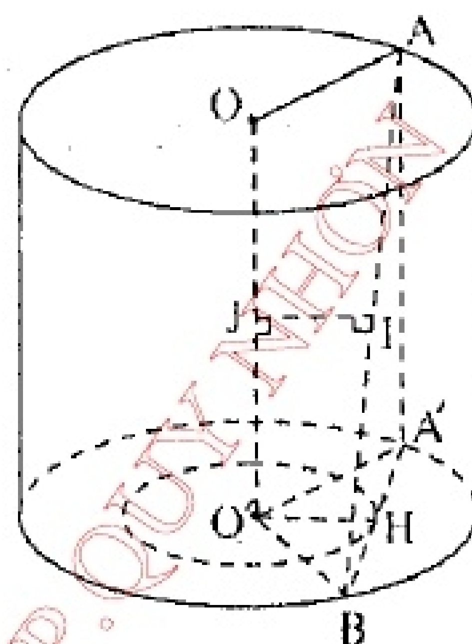
d) Ta có $4\pi R^2 = 2S_{xq} = 8\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$ hay $R^4 = 4x^2(R^2 - x^2)$ và do đó $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

2. Gọi R' là bán kính đáy và h là chiều cao của khối trụ. Theo giả thiết ta có : $2\pi R'h = 2\pi R'^2 = 4\pi R^2$. Từ đó suy ra $R' = h = R\sqrt{2}$. Vậy khối trụ đã cho có thể tích $V = \pi R'^2 h = 2\sqrt{2}\pi R^3$.

THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

3. a) Gọi AA' là đường sinh của hình trụ (h. 55). Ta có :



Hình 55

$A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{d^2 - h^2}$ với điều kiện $d > h$.

Vì AA'//OO' nên $V_{OO'AB} = V_{OO'A'B} = \frac{h}{3}S_{O'A'B}$.

Gọi O'H là đường cao của tam giác O'A'B thì :

$$O'H = \sqrt{O'B^2 - BH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{d^2 - h^2}{4}}$$

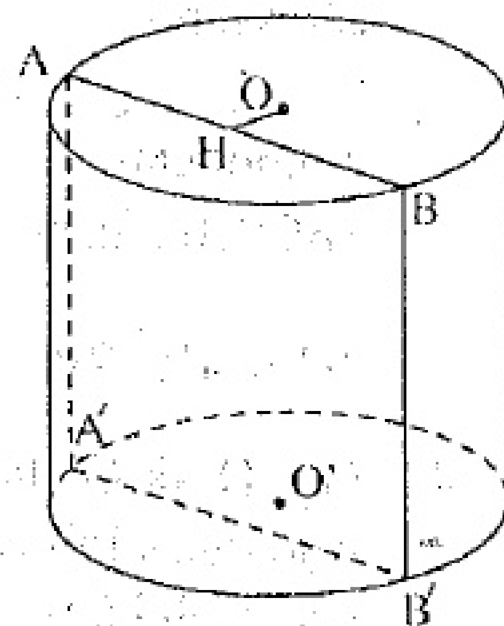
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2 - d^2} \text{ với điều kiện } d < \sqrt{4R^2 + h^2}.$$

Từ đó suy ra $V_{OO'AB} = \frac{h}{3}.\frac{O'H.A'B}{2} = \frac{1}{12}h\sqrt{\left(4R^2 + h^2 - d^2\right)\left(d^2 - h^2\right)}$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng khoảng cách giữa đường thẳng OO' và mp(AA'B) và do đó bằng $O'H = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2 - d^2}$.

c) Gọi I là trung điểm của AB và J là trung điểm của OO' thì IJ //O'H nên IJ là đường vuông góc chung của AB và OO'. Quỹ tích điểm H là đường tròn (C) tâm O' bán kính $r = O'H = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2 - d^2}$ và nằm trên mặt đáy của hình trụ. Chú ý rằng $\overrightarrow{HI} = \frac{\overrightarrow{O'O}}{2}$ nên quỹ tích I là đường tròn (C'), ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\overrightarrow{O'O}}{2}$.

4. Giả sử thiết diện là hình vuông ABB'A' (h. 56).



Hình 56

Gọi H là trung điểm của AB thì $OH = d$, và vì $AB = a$ nên bán kính của hình trụ là :

$$R = OA = \sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4d^2 + a^2}}{2}.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là :

$$S = 2\pi R.AA' = \pi a\sqrt{4d^2 + a^2}.$$

5. a) T_1 có bán kính là b và chiều cao là a, T_2 có bán kính là a và chiều cao là b nên diện tích xung quanh của chúng bằng nhau và bằng $2\pi ab$.

b) Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của T_1 và T_2 thì $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

6. a) Giả sử hình chữ nhật ABCD quay xung quanh đường thẳng đi qua các trung điểm M, N của AB và CD. Khi đó hình trụ có bán kính đáy là $\frac{AB}{2}$ và đường cao là MN = AD nên nó có diện tích xung quanh là

$$S_{xq} = 2\pi\frac{AB}{2}.AD = \pi AB.AD = \pi S.$$

b) Ta có $AB + AD = 2p$, $AB.AD = S$ nên AB và AD là nghiệm của phương trình $x^2 - 2px + S = 0$. Vậy, với điều kiện $p^2 \geq S$, ta có

+ Hoặc $AB = p + \sqrt{p^2 - S}$ và $AD = p - \sqrt{p^2 - S}$. Khi đó :

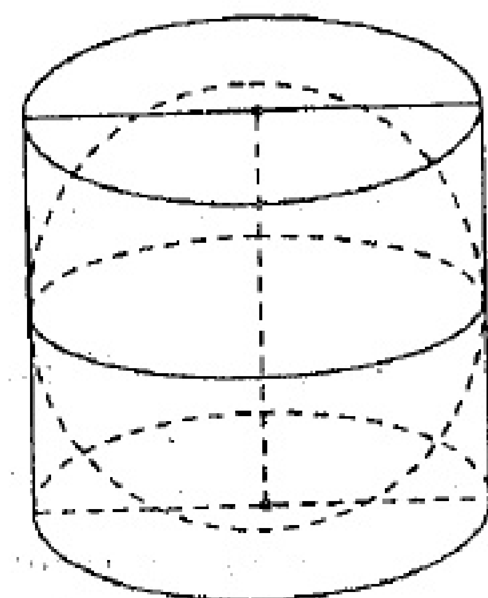
$$V = \pi\frac{AB^2}{4}AD = \frac{\pi}{4}S\left(p + \sqrt{p^2 - S}\right).$$

+ Hoặc $AB = p - \sqrt{p^2 - S}$ và $AD = p + \sqrt{p^2 - S}$. Khi đó :

$$V = \pi\frac{AB^2}{4}AD = \frac{\pi}{4}S\left(p - \sqrt{p^2 - S}\right).$$

c) Nếu ABCD là hình vuông thì $AB = AD = \sqrt{S}$ và khi đó :

$$V = \pi\frac{AB^2}{4}AD = \frac{\pi S\sqrt{S}}{4}.$$

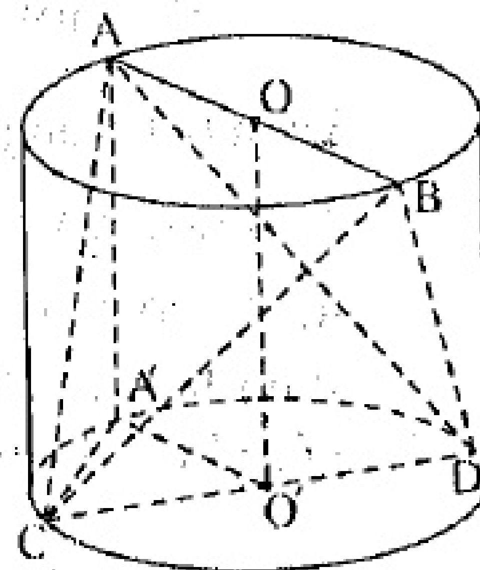

Hình 57

7. Gọi R là bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông (h. 57). Khi quay, hình vuông sinh ra khối trụ có bán kính R và chiều cao 2R, còn hình tròn sinh ra khối cầu bán kính R.

Vậy hình (H) sinh ra khối tròn xoay gồm khối trụ bỏ đi khối cầu.

Thể tích của nó là

$$V' = \pi R^2.2R - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{1}{2}.\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{V}{2}.$$



Hình 58

8. Gọi O và O' là trung điểm của AB và CD thì OO' là trục của hình trụ (h. 58). Vì ABCD là tứ diện đều có các cạnh bằng $AB = 2R$ nên :

$AC^2 = AA'^2 + A'C^2$ (A' là hình chiếu của A trên mặt đáy kia)

$= OO'^2 + A'O'^2 + O'C^2$ (do $AB \perp CD$ nên $\Delta A'O'C$ vuông)

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$\Rightarrow 4R^2 = OO'^2 + 2R^2 \Rightarrow OO' = R\sqrt{2}$.

Vậy hình trụ có thể tích : $\pi R^2.OO' = \pi\sqrt{2}R^3$.

9. Gọi R là bán kính của (T) thì chiều cao của nó là $h = 2R$. Gọi R' là bán kính mặt cầu (S) thì theo giả thiết ta có $2\pi R.2R = 4\pi R'^2$, hay R' = R. Tâm I của mặt cầu là trung điểm O của đoạn thẳng nối tâm hai đáy của hình trụ. Như vậy khoảng cách từ O tới hai mặt đáy cũng như tới mọi đường sinh đều bằng R. Suy ra mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt đáy của hình trụ, đồng thời tiếp xúc với mọi đường sinh của hình trụ.

10. Đáy của hình trụ là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a nên có bán kính $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Chiều cao hình trụ là a .Thể tích hình trụ là $V = \pi R^2.a = \frac{\pi a^3}{3}$.

11. a) Ta chứng minh rằng có đường tròn nội tiếp hình thang ABCD. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD (h. 59) thì

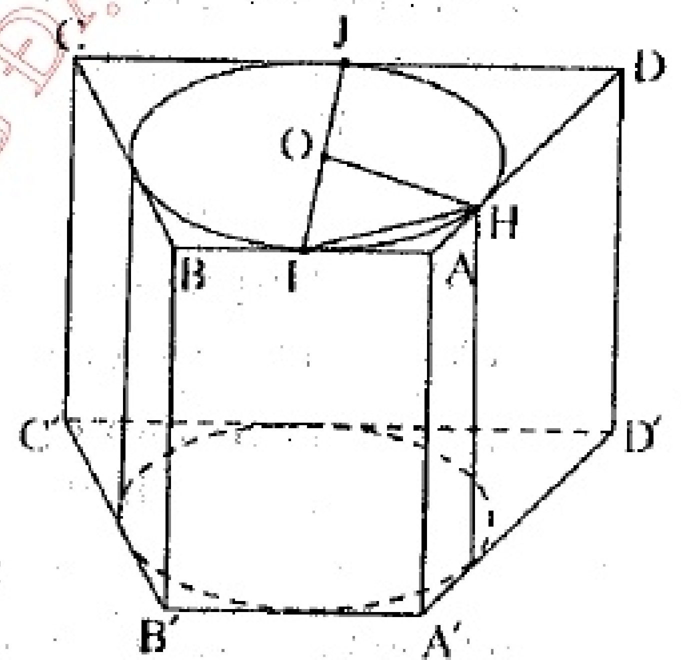
$$IJ = \sqrt{AD^2 - (JD - IA)^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}\,a.$$

Gọi O là trung điểm của IJ, ta có :

$$OA^2 = IA^2 + IO^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2,$$

$$OD^2 = JD^2 + JO^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2.$$

Từ đó suy ra $OA^2 + OD^2 = AD^2$, tức là tam giác OAD vuông ở O. Gọi OH là đường cao của tam giác OAD thì $OH = \frac{OA.OD}{AD} = \frac{\sqrt{18a^2}}{3a} = a\sqrt{2}$.



Hình 59

Vậy $OI = OJ = OH = a\sqrt{2}$ nên đường tròn tâm O bán kính $R = a\sqrt{2}$ tiếp xúc với ba cạnh AB, CD, AD, và vì lí do đối xứng nên nó cũng tiếp xúc với BC. Vậy có hình trụ (T) nội tiếp lăng trụ ABCD.A'B'C'D'.

b) Hình trụ (T) có thể tích : $V = \pi R^2.a = 2\pi a^3$ và có diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 2\pi Ra + 2\pi R^2 = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi a^2.$$

§3. Mặt nón, khối nón

1. Cho tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông CB = a , CA = b.

a) Quay tam giác ABC quanh đường thẳng CA. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

b) Quay tam giác ABC quanh đường thẳng CB. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA (100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN)

http://sachviet.edu.vn

c) Quay tam giác ABC quanh đường thẳng AB. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

d) Tìm sự liên hệ giữa các thể tích của ba khối đó.

2. Cho mặt cầu đường kính AB = 2R. Một mặt phẳng vuông góc với AB tại điểm H (nằm giữa A và B) cắt mặt cầu theo một đường tròn (C). Xét hình nón có đỉnh A và có đáy là đường tròn (C) (thường gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu đã cho). Đặt $AH = x$.

a) Tính thể tích V của hình nón theo R và x. Với giá trị nào của x thì thể tích đó lớn nhất và giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

b) Tính diện tích xung quanh S của hình nón theo R và x. Với giá trị nào của x thì diện tích đó lớn nhất và giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

3. Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng R và chiều cao $SO = R$. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với SO tại điểm O' ta được đường tròn (C). Gọi (T) là hình trụ có một đáy là (C) và có trục là OO'. Đặt $SO' = x$ với $0 < x < R$.

a) Tính thể tích V và diện tích xung quanh S của hình trụ (T).

b) Với giá trị nào của x thì thể tích V lớn nhất ?

c) Với giá trị nào của x thì diện tích S lớn nhất ?

d) Với giá trị nào của x thì diện tích toàn phần của hình trụ bằng diện tích xung quanh của hình nón ?

4. Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng R và chiều cao $SO = 2R$. Một mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng đáy của hình nón cắt mặt xung quanh của hình nón theo một đường tròn (C) có bán kính r $(r < R)$.

a) Mặt phẳng (α) chia hình nón thành hai phần. Tính thể tích hai phần đó.

b) Tìm diện tích mặt cầu (S) đi qua đường tròn (C) và đường tròn đáy của hình nón (N).

5. Một hình nón có bán kính đáy bằng R và diện tích xung quanh bằng n lần diện tích đáy $(n > 1)$.

a) Tính thể tích hình nón đó.

b) Với giá trị nào của n thì thể tích hình nón đó bằng thể tích mặt cầu bán kính R ?

6. Cho đường tròn (O; R) cố định. Một tam giác cân SAB đỉnh S ngoại tiếp đường tròn. Khi quay quanh trục SO, đường tròn tạo nên mặt cầu (C) và tam giác SAB tạo thành một mặt nón (N) (thường gọi là mặt nón ngoại tiếp mặt cầu (C)). Đặt $SO = x$.

a) Tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình nón (N).

b) Tìm giá trị bé nhất của S_{xq} và V.

LTĐH CẤP TOÁN - LÝ - HÓA 0order TRANG TRUNG TÂM ĐÀO TẠO QUỲ NHƠN

http://sachviet.edu.vn

7. Tìm thể tích lớn nhất của hình nón có diện tích toàn phần bằng diện tích mặt cầu bán kính R cho trước.

8. Cho hình lục giác đều cạnh a, tâm O. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng Δ trong trường hợp sau :

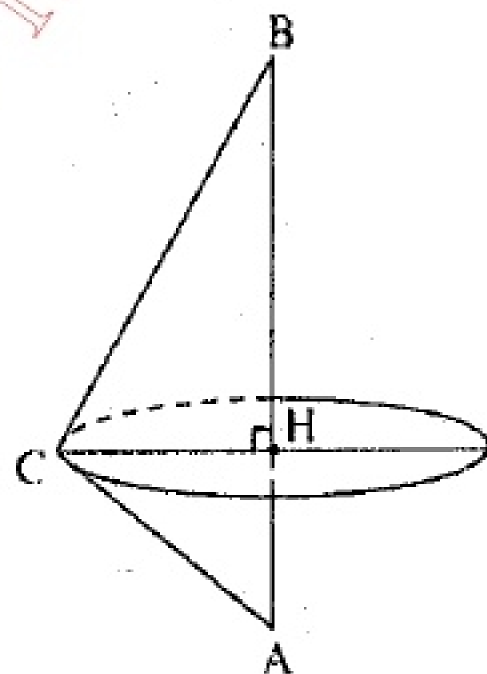
a) Δ đi qua hai đỉnh đối diện của lục giác ;

b) Δ là trung trực của một cạnh.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Khối tròn xoay tạo thành là khối nón có bán kính đáy là $CB = a$ và đường cao là $AC = b$. Vậy nó có thể tích: $V_1 = \frac{\pi}{3}a^2b$.

b) Khối tròn xoay tạo thành là khối nón có bán kính đáy là $CA = b$ và đường cao là $CB = a$. Vậy nó có thể tích: $V_2 = \frac{\pi}{3}b^2a$.



Hình 60

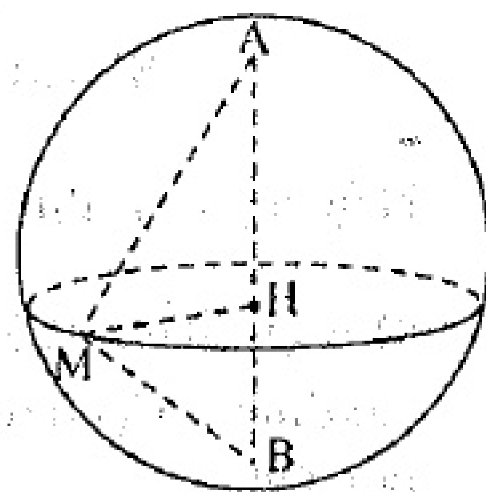
c) Gọi CH là đường cao của tam giác ABC (h. 60). Khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ABC quanh AB có thể phân thành hai khối nón cùng chung đáy là đường tròn có bán kính CH và có đường cao lần lượt là AH và BH. Vậy nó có thể tích là:

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi CH^2.AB = \frac{\pi}{3}\left(\frac{CA.CB}{AB}\right)^2 AB = \frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

d) Theo kết quả trên ta có $\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2}\left(\frac{1}{a^4b^2} + \frac{1}{b^4a^2}\right) = \frac{9}{\pi^2}\frac{a^2+b^2}{a^4b^4}$.

Vậy ta có liên hệ: $\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V_3^2}$.

2. a) Lấy điểm M nằm trên đường tròn (C) (h. 61) thì MH là đường cao của tam giác vuông AMB nên đường tròn (C) có bán kính $r = HM = \sqrt{AH.BH} = \sqrt{x(2R-x)}$, chiều cao của hình nón là $AH = x$. Vậy hình nón có thể tích $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x)$.



Hình 61

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

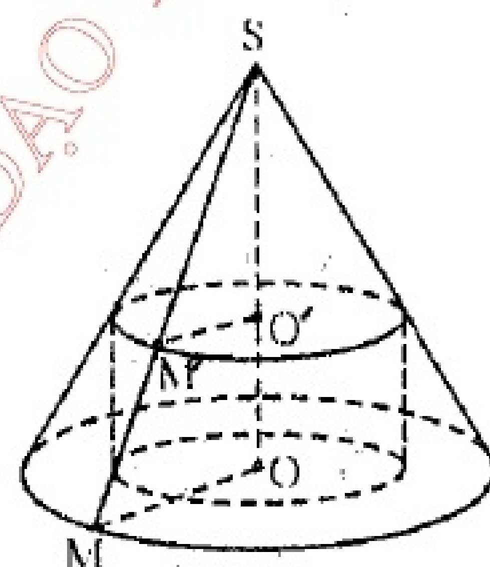
http://sachviet.edu.vn

Ta có thể viết $V = \frac{\pi}{6}x.x.(4R - 2x)$, số $x.x.(4R - 2x)$ là tích của ba số : x, x và $4R - 2x$ mà tổng của chúng bằng 4R không đổi nên tích đó lớn nhất khi ba số bằng nhau hay khi $x = \frac{4R}{3}$. Khi đó $V_{max} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$.

b) Hình nón có đường sinh là $l = AM = \sqrt{AH.AB} = \sqrt{2Rx}$. Diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi r l = \pi\sqrt{x(2R - x).2Rx} = \pi\sqrt{2Rx^2(2R - x)}$.

Cũng như trường hợp trên, S lớn nhất khi $x = \frac{4R}{3}$ và khi đó $S_{max} = \frac{8\sqrt{3}\pi R^2}{9}$.

3. a) Một đường sinh SM của hình nón cắt đường tròn (C) tại M' (h. 62) thì đường tròn (C) có bán kính $r = O'M' = x$. Vậy: $V = \pi r^2 OO' = \pi x^2(R - x)$ và $S = 2\pi r OO' = 2\pi x(R - x)$.



Hình 62

b) Ta có : $V = \pi x^2(R - x)$

$= \frac{\pi}{2}x.x(2R - 2x) \le \frac{\pi}{2}\left(\frac{x + x + 2R - 2x}{3}\right)^3 = \frac{4\pi R^3}{27}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{2R}{3}$. Vậy $V_{max} = \frac{4\pi R^3}{27}$ khi $x = \frac{2R}{3}$.

c) Ta có $S = 2\pi x(R - x) \le 2\pi\left(\frac{x + R - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{R}{2}$. Vậy ta có $S_{max} = \frac{\pi R^2}{2}$ khi $x = \frac{R}{2}$.

d) Hình trụ có diện tích toàn phần là :

$$S_{tp} = S + 2\pi x^2 = 2\pi x(R - x) + 2\pi x^2 = 2\pi Rx.$$

Hình nón có đường sinh $l = R\sqrt{2}$ nên có diện tích xung quanh là :

$$S' = \pi R l = \pi\sqrt{2}R^2.$$

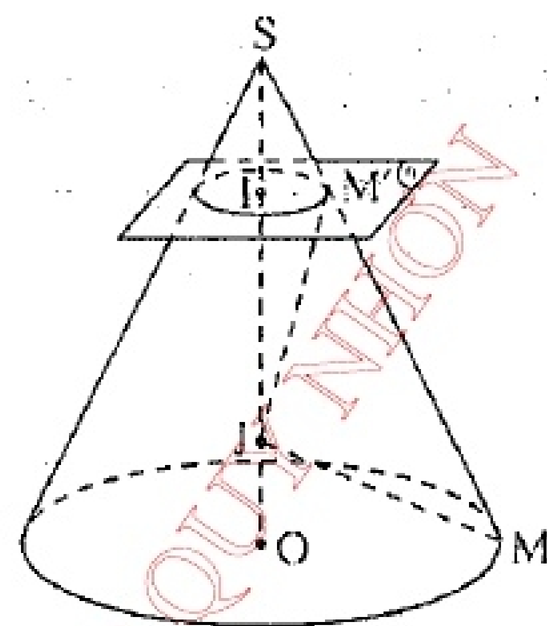
Nếu $S_{tp} = S'$ thì $2\pi Rx = \pi\sqrt{2}R^2$ hay $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

4. a) Mặt phẳng (α) chia hình nón thành hai phần, một phần là hình nón (N_1) có đỉnh S và có đường tròn đáy là (C) (h. 63). Phần còn lại thường gọi là hình nón cụt.

LTĐH-SĐT TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Gọi I là tâm đường tròn (C) thì I nằm trên SO. Lấy SM là một đường sinh của mặt nón (N) và gọi M' là giao điểm của SM và (C) thì IM'//OM nên :



Hình 63

$\frac{SI}{SO} = \frac{IM'}{OM}$ do đó $SI = 2r$. Thể tích hình nón (N_1) là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2.SI = \frac{2\pi r^3}{3}$. Thể tích hình nón đã cho (N) là $V = \frac{2\pi R^3}{3}$.

Từ đó suy ra hình nón cụt có thể tích: $V_2 = V - V_1 = \frac{2\pi}{3}(R^3 - r^3)$.

b) Tâm J của mặt cầu (S) phải nằm trên đường thẳng IO là trục của hai đường tròn, và $JM = JM'$, vì $R > r$ nên J phải nằm trên tia IO. Ta đặt $IJ = x$ thì $JO = |IO - IJ| = |2R - 2r - x|$. Từ đó $JM'^2 = x^2 + r^2$ và

$$JM^2 = JO^2 + OM^2 = |2(R-r) - x|^2 + R^2 = 4(R-r)^2 + x^2 - 4x(R-r) + R^2.$$

Vì $JM'^2 = JM^2$ nên $r^2 = 4(R-r)^2 - 4x(R-r) + R^2$, suy ra $x = \frac{5R - 3r}{4}$.

Mặt cầu (S) có bán kính :

$$R' = JM' = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{\frac{(5R-3r)^2}{16} + r^2} = \frac{1}{4}\sqrt{25(R^2 + r^2) - 30Rr}.$$

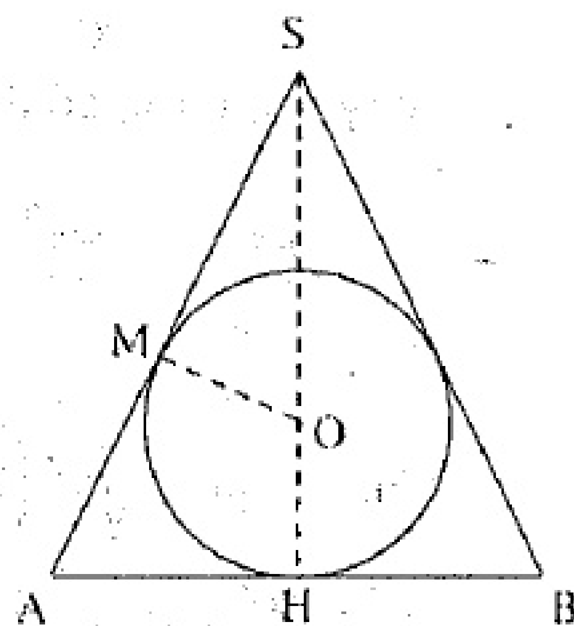
Diện tích của mặt cầu (S) là $4\pi R'^2 = \frac{\pi}{4}\left[25(R^2 + r^2) - 30Rr\right]$.

5. a) Gọi l là đường sinh của hình nón thì $S_{xq} = \pi Rl = n\pi R^2$, suy ra $l = nR$.

Chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{l^2 - R^2} = R\sqrt{n^2 - 1}$. Vậy thể tích hình nón là $V = \frac{\pi R^3\sqrt{n^2 - 1}}{3}$.

b) Ta có $V = \frac{\pi R^3\sqrt{n^2 - 1}}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Suy ra $n = \sqrt{17}$.

6. a) Điểm O nằm trên đường cao SH của tam giác cân SAB (h. 64). Nếu M là tiếp điểm nằm trên cạnh SA thì $SM = \sqrt{SO^2 - OM^2} = \sqrt{x^2 - R^2}$.



Hình 64

LTĐH-CĐ TOÁN – LÍ – HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Vì SA.SM = SH.SO nên $SA = \frac{x(x+R)}{\sqrt{x^2 - R^2}}$. Trong tam giác vuông SHA ta có

$$HA^2 = SA^2 - SH^2 = \frac{x^2(x+R)^2}{x^2 - R^2} - (x+R)^2 = \frac{R^2(x+R)}{x-R}.$$

Như vậy : $V = \frac{\pi}{3}HA^2.SH = \frac{\pi R^2(x+R)^2}{3(x-R)}$

và $S_{xq} = \pi HA.SA = \pi\frac{R\sqrt{x+R}}{\sqrt{x-R}}.\frac{x(x+R)}{\sqrt{x^2-R^2}} = \frac{\pi Rx(x+R)}{x-R}$.

b) Ta đã có $V = \frac{\pi R^2(x+R)^2}{3(x-R)}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+R)^2}{x-R}$ với $x > R$.

Ta có $f'(x) = \frac{2(x+R)(x-R) - (x+R)^2}{(x-R)^2} = \frac{(x+R)(x-3R)}{(x-R)^2}$.

Ta có $f'(x) = 0$ khi $x = 3R$, $f'(x) < 0$ khi $R < x < 3R$ và $f'(x) > 0$ khi $x > 3R$.

Vậy hàm số f đạt cực tiểu khi $x = 3R$, khi đó V cực tiểu và $V_{min} = \frac{8\pi R^3}{3}$.

Tương tự tìm được $\min S_{xq} = \pi\left(3 + 2\sqrt{2}\right)R^2$ khi $x = R(1+\sqrt{2})$.

7. Gọi x và y lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón. Theo giả thiết ta có: $\pi x^2 + \pi xy = 4\pi R^2$ hay $y = \frac{4R^2 - x^2}{x}$. Nếu h là chiều cao hình nón thì :

$$h^2 = y^2 - x^2 = (y+x)(y-x) = \left(\frac{4R^2 - x^2}{x} + x\right)\left(\frac{4R^2 - x^2}{x} - x\right)$$

$$= \frac{4R^2\left(4R^2 - 2x^2\right)}{x^2}.$$

Vậy hình nón có thể tích :

$$V = \frac{\pi x^2 h}{3} = \frac{\pi x^2}{3}\sqrt{\frac{8R^2\left(2R^2 - x^2\right)}{x^2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi R}{3}\sqrt{x^2\left(2R^2 - x^2\right)}.$$

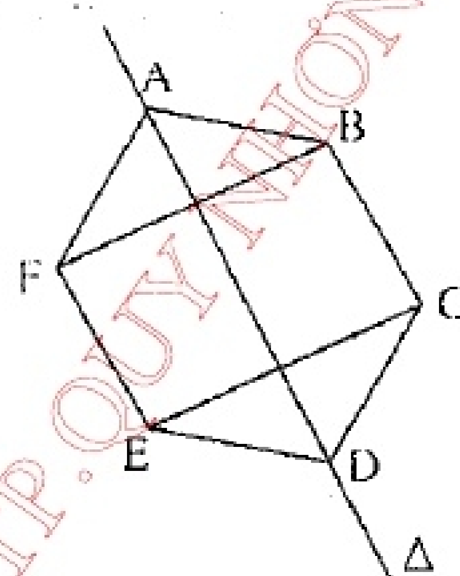
Chú ý rằng $\sqrt{x^2\left(2R^2 - x^2\right)} \le \frac{x^2 + \left(2R^2 - x^2\right)}{2} = R^2$, dấu bằng xảy ra khi $x^2 = R^2$ hay $x = R$.

LTĐH-CĐ TOÁN- LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Vậy thể tích lớn nhất của hình nón là $V_{max} = \dfrac{2\sqrt{2}\pi R^3}{3}$.

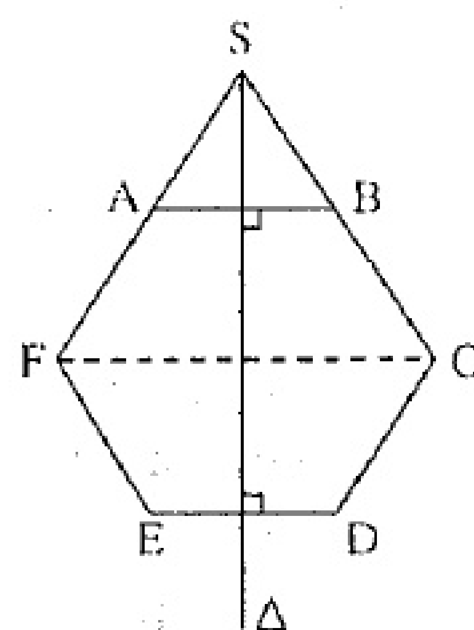
8. a) Giả sử ABCDEF là lục giác đều và Δ đi qua hai đỉnh đối diện A và D (h. 65). Khi đó khối tròn xoay tạo thành có thể phân làm ba khối : một khối trụ tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật BCEF, khối nón sinh bởi tam giác ABF và khối nón sinh bởi tam giác DCE. Bán kính đáy của khối trụ và khối nón bằng nhau và bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, chiều cao của khối trụ bằng a và chiều cao mỗi hình chóp bằng $\dfrac{a}{2}$.



Hình 65

Vậy thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a + \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a = \pi a^3$.

b) Giả sử Δ là trung trực cạnh AB (cũng đồng thời là trung trực cạnh DE) (h. 66). Khối tròn xoay tạo thành bởi lục giác ABCDEF có thể tích gấp đôi khối tròn xoay (H) tạo thành bởi hình thang ABCF. Gọi S là giao điểm của BC và AF thì S cũng thuộc Δ. Gọi V_1 là thể tích hình nón tạo bởi tam giác đều SAB thì hình nón tạo bởi tam giác đều SCF có thể tích $8V_1$ (vì tam giác SCF đồng dạng với tam giác SAB với tỉ số 2). Vậy khối tròn xoay (H) có thể tích :



Hình 66

$$V_{(H)} = 8V_1 - V_1 = 7V_1 = 7.\frac{\pi}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}\pi a^3.$$

Khối tròn xoay sinh bởi lục giác ABCDEF có thể tích

$$V = 2V_{(H)} = \frac{7\sqrt{3}}{12}\pi a^3.$$

Chủ đề 7

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Hệ toạ độ trong không gian, toạ độ của một vectơ, toạ độ của một điểm, biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, khoảng cách giữa hai điểm. Tích vectơ (tích có hướng của hai vectơ). ***Một số ứng dụng của tích vectơ.*** Phương trình mặt cầu.

LTĐH-SĐ TOÁN - LÝ - HÓA 100 B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2. Phương trình mặt phẳng. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Phương trình tổng quát của mặt phẳng. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
3. Phương trình đường thẳng. Phương trình tham số của đường thẳng. Phương trình chính tắc của đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau. ***Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng. Công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.***

Các dạng toán cần luyện tập :

1. Tính toạ độ của tổng, hiệu hai vectơ, tích của vectơ với một số ; tính được tích vô hướng của hai vectơ, ***tích có hướng của hai vectơ*** ; chứng minh bốn điểm không đồng phẳng ; tính thể tích của khối tứ diện.

   Cho hai vectơ : $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$.

   + Tích vô hướng của hai vectơ : $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

   + Góc giữa hai vectơ : $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$.

   + Tích có hướng của hai vectơ : $[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$.

2. Tính khoảng cách giữa hai điểm có toạ độ cho trước. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của mặt cầu có phương trình cho trước. Viết phương trình mặt cầu (biết tâm và đi qua một điểm cho trước, biết đường kính).

   + Khoảng cách giữa 2 điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$:

   $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

   + Đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S ; R) và mp(α):

   $$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

   có tâm H là hình chiếu của tâm I của mặt cầu (S; R) trên mp(α), có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ với $d = d(I,(\alpha))$.

3. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng. Tính góc giữa hai mặt phẳng. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100DE TRUNG TÂM ĐÀO TẠO QUYẾT TIẾN

http://sachviet.edu.vn

+ mp(α) song song với cặp vectơ $\vec{u}(x;y;z), \vec{u'}(x';y';z')$ có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n} = \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right).$$

+ Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$ là :

$$d(M,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Viết phương trình tham số của đường thẳng (đi qua hai điểm cho trước, đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước, đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước). Sử dụng phương trình của hai đường thẳng để xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng đó. Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm trên một đường thẳng hoặc trên một mặt phẳng.

• Phương trình tham số : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

là phương trình đường thẳng qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

• Phương trình chính tắc :

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ là phương trình đường thẳng qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$, $abc \neq 0$.

• Hình chiếu d' của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) :

– Tìm mặt phẳng (Q) đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (P).

– Hình chiếu d' chính là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

+ Đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

có vectơ chỉ phương: $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\right).$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bắt đầu từ đây, các bài toán đều cho trong không gian tọa độ Oxyz.

§1. Toạ độ của vectơ và điểm

1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' biết $A = (1;0;1)$, $B = (2;1;2)$, $D = (1;-1;1)$, $C' = (4;5;-5)$.

   a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

   b) Tính côsin của góc giữa mp(ABCD) và mp(ADD'A').

   c) Tính côsin của góc hợp bởi đường thẳng AC' và mp(ABCD).

2. Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(−2; 1; −2).

   a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

   b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BD.

3. Cho các điểm A(1;2;−1), B(2;−1;3), C(−2;3;3).

   a) Chứng tỏ bốn điểm O, A, B, C không đồng phẳng.

   b) Gọi G là trọng tâm tứ diện OABC. Tính các khoảng cách từ G tới các đỉnh của tứ diện.

   c) Tìm tọa độ tâm mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C và tính bán kính mặt cầu đó.

   d) Tìm tọa độ điểm D nằm trên mp(Oxy) sao cho tứ diện ABCD có các cạnh đối diện vuông góc với nhau.

4. Cho tứ diện ABCD với $A(3;3;0)$, $B(1;2;-3)$, $C(-4;5;1)$, $D(1;1;-1)$.

   a) Tìm một đỉnh của tứ diện mà ba cạnh chung nhau đỉnh ấy đôi một vuông góc với nhau.

   b) Tính thể tích tứ diện.

   c) Tính khoảng cách từ đỉnh D tới mp(ABC).

   d) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

5. Cho tứ diện ABCD với $A(2;2;-1)$, $B(0;1;-4)$, $C(-5;4;0)$, $D(-3;7;-1)$.

   a) Chứng minh rằng các cạnh đối của tứ diện bằng nhau.

   b) Chứng minh rằng trọng tâm tứ diện cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

   c) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

6. Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai điểm A(3;−3;3), B(2;2;2).

   a) Tìm tọa độ điểm C sao cho OABC là hình bình hành.

   b) Tính diện tích hình bình hành OABC.

   c) Tính thể tích hình chóp S.OABC, biết rằng S = (−1;1;3)

LTĐH-ĐC TOÁN LÍ HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

7. Trong không gian tọa độ Oxyz cho bốn điểm A(2;0;−1), B(1;1;−1), C(1;0;0), D(2;1;0).

a) Chứng minh rằng tứ diện ABCD là tứ diện đều.

b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (0;-1;0)$, mà $B = (2;1;2)$ nên $C = (2;0;2)$.

Từ đó $\overrightarrow{CC'} = (2;5;-7)$. Vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = (2;5;-7)$ mà $A = (1;0;1)$ nên $A' = (3;5;-6)$. Tương tự, ta tính được $B' = (4;6;-5)$ và $D' = (3;4;-6)$.

b) mp(ABCD) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (1;0;-1)$. Mặt phẳng (ADD'A') có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n'} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 5 & -7\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 0\\ -7 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right) = (7;0;2).$$

Gọi φ là góc giữa mp(ABCD) và mp(ADD'A') thì

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}, \vec{n'})\right| = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|} = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{7^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{106}}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{AC'} = (3;5;-6)$ và mp(ABCD) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;0;-1)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' và mp(ABCD) thì :

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AC'}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{9}{\sqrt{140}}, \text{ bởi vậy } \cos\varphi = \sqrt{\frac{59}{140}}.$$

2. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;0;1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3;1;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right) = (1;1;1),$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -3 + 1 - 2 = -4 \neq 0$$

suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng, do đó bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Vì $\overrightarrow{AC} = (-1;0;1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2;0;-2)$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$. Vậy hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau.

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN
http://sachviet.edu.vn

3. a) *Hướng dẫn.*

Vì $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC} \neq 0$ nên bốn điểm O, A, B, C không đồng phẳng.

b) Tọa độ trọng tâm G là trung bình cộng các tọa độ tương ứng của các điểm O, A, B, C nên ta có $G = \left(\frac{1}{4};1;\frac{5}{4}\right)$.

Từ đó : $OG = \sqrt{\frac{1}{16}+1+\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{42}}{4}$, $AG = \sqrt{\frac{9}{16}+1+\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{106}}{4}$

$BG = \sqrt{\frac{49}{16}+4+\frac{49}{16}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$, $CG = \sqrt{\frac{81}{16}+4+\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{194}}{4}$.

c) Giả sử mặt cầu đi qua O, A, B, C có tâm là $I(x;y;z)$. Vì $IO = IA = IB = IC$ nên :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2 = (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 \\ x^2+y^2+z^2 = (x+2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+z+3=0 \\ -2x+y-3z+7=0 \\ 2x-3y-3z+11=0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $x = \frac{11}{10}$, $y = \frac{21}{10}$, $z = \frac{23}{10}$, vậy

$I = \left(\frac{11}{10};\frac{21}{10};\frac{23}{10}\right)$.

Bán kính mặt cầu là: $R = OI = \frac{\sqrt{11^2+21^2+23^2}}{10} = \frac{\sqrt{1091}}{5}$.

d) Điểm D nằm trên mp(Oxy) nên có tọa độ $D = (x;y;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AD} = (x-1;y-2;1)$, $\overrightarrow{BD} = (x-2;y+1;-3)$, $\overrightarrow{CD} = (x+2;y-3;-3)$, $\overrightarrow{AB} = (1;-3;4)$, $\overrightarrow{BC} = (-4;4;0)$, $\overrightarrow{CA} = (3;-1;-4)$. Các cạnh đối của tứ diện vuông góc với nhau nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = 0 \\ \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-1)+4(y-2)=0 \\ 3(x-2)-(y+1)+12=0 \\ (x+2)-3(y-3)-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-1=0 \\ 3x-y+5=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1. \end{cases}$$

Vậy điểm D có tọa độ : $D = (-2;-1;0)$.

LTĐH-CĐ TOÁN -LÊ HOÀ A 000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

4. a) $\overrightarrow{DA} = (2;2;1)$, $\overrightarrow{DB} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{DC} = (-5;4;2)$.

Suy $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$.

Vậy ba cạnh DA, DB, DC của tứ diện đôi một vuông góc.

b) Từ câu a) suy ra

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}DA.DB.DC = \frac{1}{6}\sqrt{2^2+2^2+1}.\sqrt{1+2^2}.\sqrt{5^2+4^2+2^2} = \frac{15}{2}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-7;2;1)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14\times 54 - 9^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó suy ra khoảng từ D đến mp(ABC) là $h = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = 3\dfrac{15}{2}.\dfrac{2}{15\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

d) Giả sử $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, từ giả thiết $IA = IB = IC = ID$ tìm được kết quả $I = \left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Suy ra mặt cầu có bán kính là $R = IA = \dfrac{\sqrt{59}}{2}$.

5. a) Ta có $AB = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$, $CD = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$, vậy $AB = CD = \sqrt{14}$.

Tính toán tương tự, ta được $AC = BD = \sqrt{54}$, $AD = BC = \sqrt{50}$.

b) Gọi G là trọng tâm tứ diện, tìm được $G = \left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Từ đó ta tính được $GA = GB = GC = GD = \dfrac{\sqrt{59}}{2}$.

d) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có tâm G và có bán kính là $R = \dfrac{\sqrt{59}}{2}$.

6. a) Giả sử $C = (x;\ y;\ z)$. Trung điểm của AC và OB trùng nhau nên :

$3 + x = 0 + 2$; $-3 + y = 0 + 2$; $3 + z = 0 + 2$. Suy ra $x = -1$, $y = 5$, $z = -1$.

Vậy $C = (-1;\ 5;\ -1)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC} = (-4;8;-4)$, $\overrightarrow{OB} = (2;2;2)$. Từ đó ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OB} = -8+16-8 = 0$, vậy AC vuông góc với BD, và do đó OABC là hình thoi. Suy ra :

$$dt(OABC) = \frac{1}{2}AC.OB = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+8^2+4^2}.\sqrt{2^2+2^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{96}\sqrt{12} = 12\sqrt{2}.$$

LTĐH-SP TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUI NHƠN

http://sachviet.edu.vn

c) Giả sử mp (P) đi qua O, A, B có phương trình $ax + by + cz + d = 0$. Vì các điểm O, A, B nằm trên mp(P) nên ta có : $d = 0$, $3a - 3b + 3c = 0$, $2a + 2b + 2c = 0$. Từ đó suy ra b = 0 và a = –c. Vậy mp(P) có phương trình x – z = 0. Chiều cao h của khối chóp S.OABC bằng khoảng cách từ S đến mp(P) nên: $h = \frac{|-1-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$. Vậy $V_{S.OABC} = \frac{1}{3}dt(OABC).h = \frac{1}{3}12\sqrt{2}.\frac{4}{\sqrt{2}} = 16$.

7. a) Ta có $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, tương tự ta cũng tính được độ dài các cạnh của tứ diện ABCD đều bằng $\sqrt{2}$, chứng tỏ ABCD là tứ diện đều.

b) Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều ABCD chính là trọng tâm G của hình tứ diện đó . Ta có

$$x_G = \frac{2+1+1+2}{4} = \frac{3}{2} \ ; \ y_G = \frac{0+1+0+1}{4} = \frac{1}{2} \ ; \ z_G = \frac{-1-1+0+0}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Tâm mặt cầu là điểm $G\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Bán kính mặt cầu là :

$$R = GA = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Phương trình mặt cầu là

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y + z + 2 = 0.$$

§2. Phương trình mặt phẳng

1. Cho ba điểm $M(2;0;-1)$, $N(1;-2;3)$, $P(0;1;2)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm M, O (O là gốc tọa độ) và vuông góc với mp(MNP).

c) Viết phương trình mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng NP.

d) Tìm khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng trung trực của NP.

e) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ và cách đều ba điểm M, N, P, ngoài ra ba điểm M, N, P nằm cùng phía đối với mp (α).

2. Cho bốn điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(1;1;1)$, $D(1;0;1)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, B và vuông góc với mp(BCD).

LTĐH-ĐỀ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua A, B và song song với đường thẳng CD.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

3. Cho mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z - 1 = 0$. Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi mp(P) với mp(Oxy), mp(Oyz) và mp(Oxz).

a) Tính côsin của các góc α, β, γ. Chứng tỏ rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

b) Viết phương trình của mp(Q) đi qua giao tuyến của mp(P) và mp(Oxy) đồng thời vuông góc với mp(P).

4. Cho bốn điểm $A(2;-1;0), B(2;0;1), C(0;1;-1), D(-2;1;1)$.

a) Tìm tập hợp các điểm M cách đều hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

b) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu đường kính CD theo một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu ?

5. Cho mặt phẳng (α) có phương trình : $x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $A = (2;-1;3)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mp(α).

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(α).

c) Viết phương trình mp(α') đối xứng với mp(α) qua điểm A.

d) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và điểm $B(0;0;1)$ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bé nhất.

6. Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$ và hai điểm $A(2;2;0)$, $B(2;1;0)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

b) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và vuông góc với đường thẳng IA, trong đó I là tâm mặt cầu.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;-2;4)$, $\overrightarrow{MP} = (-2;1;3)$, $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-10;-5;-5)$. Mặt phẳng (MNP) đi qua M có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]$. Ta có thể lấy $\vec{n} = (2;1;1)$ thì mp(MNP) có phương trình $2(x-2) + y + z + 1 = 0$ hay $2x + y + z - 3 = 0$.

b) Mặt phẳng (MNP) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;1;1)$, $\overrightarrow{OM} = (2;0;-1)$. Mặt phẳng cần tìm đi qua O và phải có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{OM}\right] = (-1;4;-2)$ nên có phương trình : $x - 4y + 2z = 0$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

c) Vectơ $\overrightarrow{NP} = (-1;3;-1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm nên mặt phẳng đó có phương trình

$$-(x-2)+3y-(z+1)=0 \text{ hay } -x+3y-z+1=0.$$

d) Mặt phẳng trung trực của NP đi qua trung điểm I của NP và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{NP}$. Ta có $I = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $\overrightarrow{NP} = (-1;3;-1)$ nên mặt phẳng đó có phương trình $-\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{5}{2}\right)=0$ hay $-2x+6y-2z+9=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;0;-1)$ tới mặt phẳng đó là

$$d = \frac{|-4+2+9|}{\sqrt{4+36+4}} = \frac{7}{2\sqrt{11}}.$$

e) Mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và song song với mp (MNP) nên có phương trình $2x+y+z=0$.

2. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;1), \overrightarrow{BC} = (2;1;-1), \overrightarrow{CD} = (0;-1;0)$. Mặt phẳng (BCD) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right] = (-1;0;-2)$. Mặt phẳng (α) phải có vectơ pháp tuyến $\vec{n'}$ cùng vuông góc với $\vec{n}$ và $\overrightarrow{AB}$ nên có thể lấy $\vec{n'} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}\right] = (2;-3;-1)$. Ngoài ra, mp$(\alpha)$ đi qua $A(0;1;1)$ nên có phương trình $2x-3(y-1)-(z-1)=0$ hay $2x-3y-z+4=0$.

b) Mặt phẳng (β) đi qua A và có vectơ pháp tuyến cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (1;0;1)$ nên có phương trình $x+z-1=0$.

c) Vì $CD // (\beta)$ và $AB \subset (\beta)$ nên khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CD bằng khoảng cách từ điểm C tới mp(β), vậy $d = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-2)$. Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Oxz) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{k} = (0;0;1)$, $\vec{i} = (1;0;0)$ và $\vec{j} = (0;1;0)$. Ta có

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{k}|.|\vec{n}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{i}|.|\vec{n}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{|\vec{n}.\vec{j}|}{|\vec{j}|.|\vec{n}|} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó ta có $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9} = 1$.

ĐTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

b) Gọi Δ là giao tuyến của mp(P) và mp(Oxy) thì Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\vec{n}, \vec{k}\right] = (2;-1;0)$. Mặt phẳng (Q) đi qua Δ và vuông góc với mp(P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (2;4;5)$. Ta có thể chọn một điểm nào đó nằm trên Δ, chẳng hạn điểm $M(1;0;0)$.

Khi đó mp(Q) đi qua M có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q$ nên có phương trình :

$$2(x-1) + 4y + 5z = 0 \text{ hay } 2x + 4y + 5z - 2 = 0.$$

4. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;2;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (-4;2;1)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua A và có vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3;-2;2)$ nên có phương trình

$$-3(x-2) - 2(y+1) + 2z = 0 \text{ hay } 3x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

Mặt phẳng (ABD) đi qua A và có vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (-1;-4;4)$ nên có phương trình: $-(x-2) - 4(y+1) + 4z = 0$ hay $x + 4y - 4z + 2 = 0$.

Điểm $M(x;y;z)$ cách đều hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) khi và chỉ khi:

$$\frac{|3x + 2y - 2z - 4|}{\sqrt{17}} = \frac{|x + 4y - 4z + 2|}{\sqrt{33}}$$

hay $\sqrt{33}(3x + 2y - 2z - 4) \pm \sqrt{17}(x + 4y - 4z + 2) = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng có phương trình:

$$\left(3\sqrt{33} \pm \sqrt{17}\right)x + \left(2\sqrt{33} \pm 4\sqrt{17}\right)y - 2\left(\sqrt{33} \pm 2\sqrt{17}\right)z - 4\sqrt{33} \pm 2\sqrt{17} = 0.$$

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình : $3x + 2y - 2z - 4 = 0$. Khoảng cách từ tâm $I = (-1;1;0)$ của mặt cầu đến mặt phẳng (ABC) là $h = \frac{|-3 + 2 - 4|}{\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{17}}$. Vì bán kính của mặt cầu là $R = \sqrt{2}$ nên $h < R$.

Vậy mp(ABC) cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \frac{3}{\sqrt{17}}$.

5. a) $d\left(A,(\alpha)\right) = \frac{|2 + 2 + 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}$.

b) Giả sử $A' = (x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{AA'} = (x-2; y+1; z-3)$ và nếu I là trung điểm của AA' thì $I = \left(\frac{x+2}{2}; \frac{y-1}{2}; \frac{z+3}{2}\right)$, điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(α) khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ pháp tuyến của mp(α) và điểm I nằm trên (α), tức là :

http://sachviet.edu.vn

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}\\ \dfrac{x+2}{2}-2\left(\dfrac{y-1}{2}\right)+\dfrac{z+3}{2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-3=0\\ y+2z-5=0\\ x-2y+z+5=0\end{cases}$$

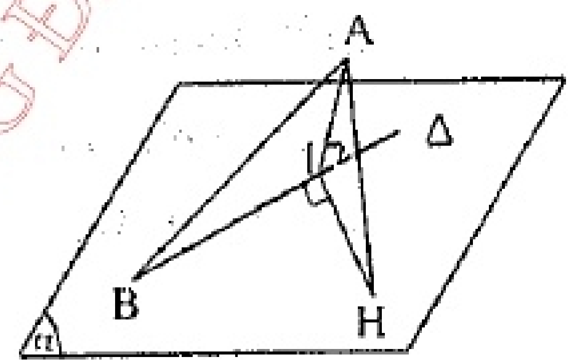
$\Leftrightarrow x=0; y=3; z=1$. Vậy $A'=(0;3;1)$.

c) mp(α') phải song song với (α) nên có phương trình $x-2y+z+c=0$ $(c\neq-1)$. Điểm A cách đều hai mặt phẳng đó nên:

$$\frac{|2+2+3+c|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|2+2+3-1|}{\sqrt{1+4+1}} \text{ hay } |7+c|=6.$$

Suy ra $c=-13$. Vậy (α') có phương trình : $x-2y+z-13=0$.

d) Chú ý rằng điểm B nằm trên (α). Mặt phẳng (β) đi qua A, B cắt (α) theo giao tuyến Δ đi qua B. Kẻ $AH\perp(\alpha)$ và $AI\perp\Delta$ thì $HI\perp\Delta$ (h. 67), do đó góc $\varphi=\widehat{AIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



Hình 67

Ta có $\tan\varphi=\tan\widehat{AIH}=\dfrac{AH}{HI}\geq\dfrac{AH}{HB}=\tan\widehat{ABH}$,

vậy góc φ bé nhất khi I trùng với B, tức là đường thẳng Δ vuông góc với HB và do đó vuông góc với $\overrightarrow{AB}(-2;1;-2)$, ngoài ra Δ nằm trong mp(α) nên vuông góc với vectơ $\vec{n}(1;-2;1)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Vậy Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(-3;0;3)$ và ta có thể lấy $\vec{u}=(1;0;-1)$. Mặt phẳng (β) đi qua AB và Δ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]=(1;4;1)$, nó có phương trình $x+4y+z-1=0$.

6. a) Mặt cầu có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính $R=2$. Giả sử mặt phẳng cần tìm có phương trình $ax+by+cz+d=0$. Từ điều kiện mặt phẳng đó đi qua A, B và khoảng cách từ I tới mặt phẳng đó bằng 2 nên ta có:

$$\begin{cases}2a+2b+d=0\\ 2a+b+d=0\\ \dfrac{|b-2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\end{cases}$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100R TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

...phương trình thứ ba trở

$\left(\frac{d^2}{4}+c^2\right) \Leftrightarrow dc = 0.$

...ương trình $z = 0$.

...phương trình $x - 2 = 0$.

...(α) cần tìm, phương trình

...ừ tâm cầu $I(0;1;-2)$ tới

...= 6

...: $2x + y + 2z + 9 = 0$ và

...tổng **hợp**

...$-1;1;0)$.

...g góc với mp(BCD).

...D).

...(BCD).

...thẳng BC.

...ng thẳng BC.

...ng trình:

...$(\alpha_1): -x + y + z = 0$.

...$p(\alpha_1)$, $\Delta_3 = (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$.

...quy tại một điểm, tìm tọa

...$p(\alpha_1)$.

...$g \Delta_1$ trên mp(α_1).

...trình:

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Tìm góc hợp bởi hai đường thẳng đó.

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

4. Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) : $x - 2y + z - 2 = 0$ và hai đường thẳng :

$$(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{2} \quad \text{và} \quad (d'): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

a) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mp (P) và cắt cả hai đường thẳng (d), (d').

b) Tính độ dài đoạn thẳng của Δ nằm giữa hai đường thẳng (d) và (d').

5. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (d) và (d') lần lượt có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 \\ z = -2 - t \end{cases} \qquad (d'): \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 2t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$$

a) Tìm tọa độ của điểm A trên (d) và điểm A' trên (d') sao cho đường thẳng AA' vuông góc với cả hai đường thẳng (d) và (d').

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d) và (d'). Chứng tỏ hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm I(0; −1; −1) và cắt cả hai đường thẳng (d) và (d').

6. Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt có phương trình:

$$x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{2} \ (1) \quad \text{và} \quad \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+3}{2} \ (2).$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm.

b) Tính góc hợp bởi hai đường thẳng đó.

c) Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

7. Cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình $2x - 3y + z - 1 = 0$ và $x + y - z + 2 = 0$. Cho đường thẳng Δ có phương trình : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -6 + 5t \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α).

b) Chứng tỏ rằng Δ song song với giao tuyến Δ' của (α) và (α').

c) Tìm khoảng cách giữa Δ và Δ'.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

8. Cho đường thẳng d có phương trình : $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2y-z-1=0$.

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng d song song với mp (α).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng d tới mp (α).

c) Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mp (α).

d) Viết phương trình mp (α') đối xứng với mp (α) qua đường thẳng d.

9. Cho điểm $A(2;-1;0)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và d.

b) Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

c) Chứng minh rằng mp (α) chứa đường thẳng d' : $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{4}$.

d) Chứng minh rằng hai đường thẳng d và d' cắt nhau, vuông góc với nhau, tìm tọa độ giao điểm của d và d'.

10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. M là trung điểm cạnh A'D'. Một đường thẳng d đi qua M cắt hai đường thẳng CB' và DC' tại các điểm P và Q.

a) Tính độ dài đoạn thẳng PQ.

b) Tính góc hợp bởi đường thẳng d và mp(A'BD).

11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và mp(SAD) vuông góc với mp(ABCD). Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh SB, BC, CD.

a) Chứng minh rằng $AM \perp BP$.

b) Tính thể tích khối tứ diện CMNP.

12. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại C, CA = a, CB = b và chiều cao CC' = c. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, B'C' và AA'.

a) Tính thể tích tứ diện CMNP.

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mp(MNP).

c) Tính diện tích tam giác MNP.

d) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện CMNP trong trường hợp a = b = c.

Giải – Hướng dẫn – Đáp số

1. a) Ta có $\overrightarrow{BC}=(3;-2;0)$, $\overrightarrow{BD}=(0;0;-2)$, mp(BCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(4;6;0)$, bởi vậy có thể lấy $\vec{n}=(2;3;0)$ và đó cũng là vetơ chỉ phương của đường thẳng Δ, vậy phương trình của Δ là :

LTĐH-CĐ TOÁN - HÓA 18/3 TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUI NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 6 + 3t \\ z = 1. \end{cases}$$

b) H là giao điểm của đường thẳng Δ và mp(BCD). Phương trình mp(BCD) là $2(x+1) + 3(y-1) = 0$ hay $2x + 3y - 1 = 0$. Thay các giá trị x, y, z ở phương trình của Δ vào phương trình của mp(BCD) ta được:

$$2(-2 + 2t) + 3(6 + 3t) - 1 = 0, \text{ vậy } t = -1.$$

Từ đó $H = (-4; 3; 1)$.

c) Nếu $A' = (x; y; z)$ thì vì H là trung điểm của AA' nên:

$$x - 2 = -8, y + 6 = 6, z + 1 = 2.$$

Vậy $A' = (-6; 0; 1)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua $D(-1; 1; 0)$ với vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (3; -2; 0)$ có phương trình $3(x+1) - 2(y-1) = 0$ hay $3x - 2y + 5 = 0$. Đường thẳng BC

có phương trình : $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2. \end{cases}$

Điểm K là giao điểm của mp(α) và đường thẳng BC nên tọa độ của K là nghiệm của hệ gồm phương trình của BC và của (α), ta có :
$3(-1 + 3t) - 2(1 - 2t) + 5 = 0$, vậy $t = 0$. Suy ra $K = (-1; 1; 2)$ trùng với điểm B. Vậy hình chiếu của điểm D trên đường thẳng BC chính là điểm B.

e) Nếu $D' = (x; y; z)$ thì vì B là trung điểm của DD' nên $x - 1 = -2$, $y + 1 = 2$, $z = 4$. Vậy $D' = (-1; 1; 4)$.

2. a) Các điểm nằm trên Δ_1 có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x + y + z = 0. \end{cases}$$

Đặt $x = t$ thì $y = 1 + t$ và $z = -1$. Vậy Δ_1 có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -1. \end{cases}$$

Bằng cách tương tự, ta tìm được phương trình các đường thẳng còn lại:

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN HÙNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$\Delta_2: \begin{cases} x = 4t \\ y = \dfrac{5}{4} + 3t \\ z = -\dfrac{5}{4} + t \end{cases} \qquad \Delta_3: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

b) Điểm đồng quy của ba đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 cũng là điểm đồng quy của ba mặt phẳng (α_1), (α_2), (α_3), tức là có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất là $x = 1, y = 2, z = -1$. Vậy ba đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy tại điểm $I(1;2;-1)$.

c) Đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;1;0)$, mp$(\alpha_1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2;-3;1)$. Nếu φ là góc hợp bởi Δ_1 và (α_1) thì :

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_1}\right|} = \frac{|2-3|}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \text{ do đó } \cos\varphi = \frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{7}}.$$

d) Gọi (β) là mặt phẳng đi qua Δ_1 và vuông góc với (α_1) thì vectơ pháp tuyến của (β) là $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n_1}\right] = (1;-1;-5)$. Hình chiếu Δ'_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (β) và (α_1), do đó Δ'_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_\beta}\right] = (16;11;1)$. Ngoài ra Δ'_1 đi qua điểm $I(1;2;-1)$ nên Δ'_1 có phương trình: $\dfrac{x-1}{16} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{1}$.

3. a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(2;-1;1)$. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(3;0;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-1;2;1)$. Ta có :

$\overrightarrow{M_1M_2} = (3;1;-1)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-3;-3;3)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = -15 \neq 0$. Suy ra hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

LTĐH-TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

b) Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{|-2-2+1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^0$.

c) Lấy điểm N_1 thuộc Δ_1 thì $N_1 = (2t'; -1-t'; 2+t')$, lấy điểm N_2 thuộc Δ_2 thì $N_2 = (3-t; 2t; 1+t)$.

Khi đó, $\overrightarrow{N_1N_2} = (3-t-2t'; 1+2t+t'; -1+t-t')$. Đường thẳng N_1N_2 là đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 khi và chỉ khi $\overrightarrow{N_1N_2}.\overrightarrow{u_1} = 0$ và $\overrightarrow{N_1N_2}.\overrightarrow{u_2} = 0$, tức là:

$$\begin{cases} 2(3-t-2t') - (1+2t+t') + (-1+t-t') = 0 \\ -(3-t-2t') + 2(1+2t+t') + (-1+t-t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 6t' + 4 = 0 \\ 6t + 3t' - 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình cho ta $t = 0$ và $t' = \dfrac{2}{3}$, tức là $N_1 = \left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$, $N_2 = (3;0;1)$,

$\overrightarrow{N_1N_2} = \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$. Như vậy đường vuông góc chung N_1N_2 đi qua điểm $N_2 = (3;0;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{N_1N_2} = (1;1;-1)$ nên nó có phương trình : $x - 3 = y = -(z-1)$.

d) Khoảng cách d giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là độ dài đoạn thẳng N_1N_2, tức là $d = |\overrightarrow{N_1N_2}| = \sqrt{3.\left(\dfrac{5}{3}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

4. a) Gọi M là giao điểm của (d) và mp(P) thì tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+2}{2} \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$ từ đó $x = 10$, $y = 14$, $z = 20$. Vậy $M = (10; 14; 20)$.

Gọi M' là giao điểm của (d') và mp(P). Tương tự, tìm được M' = (9;6;5).
Đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng đi qua M và M', tức là đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{M'M} = (1;8;15)$. Vậy đường thẳng Δ có phương trình : $\dfrac{x-10}{1} = \dfrac{y-14}{8} = \dfrac{z-20}{15}$.

b) Đoạn thẳng đó chính là MM'. Ta có : $MM' = \sqrt{1 + 8^2 + 15^2} = \sqrt{290}$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100% TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

5. a) Điểm A và A' lần lượt nằm trên (d) và (d') nên $A=(2+2t;2;-2-t)$,

$A'=(2;2+2t';4+t')$ .Vậy $\overrightarrow{AA'}=(-2t;2t';6+t'+t)$. Hai đường thẳng (d) và (d') lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(2;0;-1)$ và $\vec{u'}(0;2;1)$. Vì AA' vuông góc với cả hai đường thẳng (d) và (d') nên $\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=\overrightarrow{AA'}.\vec{u'}=0$, tức là:

$$\begin{cases}-4t-6-t'-t=0\\ 4t'+6+t+t'=0\end{cases} \Leftrightarrow t=t'=-1$$

Vậy $A=(0;2;-1)$ và $A'=(2;0;3)$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng (d) và (d') bằng độ dài đoạn thẳng AA'. Ta có $AA'=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$.

Giả sử hai đường thẳng (d) và (d') nằm trong cùng một mặt phẳng. Khi đó (d) // (d') (vì cùng vuông góc với AA'). Nhưng dễ thấy hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ không cùng phương. Vậy (d) và (d') chéo nhau.

6. a) Giao điểm của hai đường thẳng đó (nếu có) có tọa độ là nghiệm của hệ gồm các phương trình (1) và (2). Đặt $x-2=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{2}=t$ ta có : $x=2+t$, $y=4+2t$, $z=1+2t$, thay các giá trị này vào (2) ta được : $\frac{3+t}{2}=3+2t=\frac{4+2t}{2}$, suy ra $t=-1$. Vậy d và d' cắt nhau tại điểm I(1;2 – 1).

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;2)$, d' có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(2;1;2)$. Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng d và d' thì

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|}=\frac{8}{9}.$$

c) Mặt phẳng đi qua d và d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{u},\vec{u'}]=(2;2;-3)$, ngoài ra nó còn đi qua điểm M(2;4;1) nên có phương trình :

$$2(x-2)+2(y-4)-3(z-1)=0 \text{ hay } 2x+2y-3z-9=0.$$

7. a) Lần lượt cho $t=0$ và $t=1$, ta được hai điểm nằm trên Δ là $A(2;-1;-6)$ và $B(4;2;-1)$. Tọa độ của hai điểm đó thỏa mãn phương trình của (α) nên chúng thuộc (α). Vậy đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α).

b) Thay các giá trị x, y, z trong phương trình tham số của Δ vào phương trình của (α') ta được : $2+2t-1+3t+6-5t+2=0$ hay $0t+9=0$, vô

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

nghiệm, vậy Δ // (α'). Nhưng vì Δ nằm trong (α) nên Δ song song với giao tuyến của (α) và (α').

c) Ta lấy một điểm nào đó trên giao tuyến Δ', chẳng hạn điểm $I(-1;-1;0)$. Khoảng cách d giữa Δ và Δ' bằng khoảng cách giữa I và Δ. Gọi H là hình chiếu của I trên Δ, khi đó H có toạ độ $H = (2+2t; -1+3t; -6+5t)$ và $\overrightarrow{IH} = (3+2t; 3t; -6+5t)$. Vì IH vuông góc với Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;3;5)$ nên $\overrightarrow{IH}.\vec{u} = 0$, tức là : $2(3+2t) + 3.3t + 5(-6+5t) = 0$ hay $t = \dfrac{12}{19}$

và do đó $\overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{81}{19}; \dfrac{36}{19}; -\dfrac{54}{19}\right)$. Suy ra $d = IH = \dfrac{9\sqrt{133}}{19}$.

8. a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3;1;2)$, mp(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(0;2;-1)$. Vì $\vec{u}.\vec{n} = 0$ nên d nằm trên (α) hoặc song song với (α). Tuy nhiên nếu ta lấy điểm $A(1;-2;0)$ thì A nằm trên d nhưng không nằm trên (α), suy ra d// (α).

b) Khoảng cách h từ đường thẳng (d) tới mp(α) bằng khoảng cách từ A tới mp(α) nên $h = \dfrac{|-4-1|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$.

c) Gọi $A'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với A qua mp(α). Tìm được $A' = (1;2;-2)$.

Đường thẳng d' đi qua $A'(1;2;-2)$ và song song với d nên có phương trình :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{2}.$$

d) Mặt phẳng (α') phải song song với mp(α) nên có phương trình $2y - z + c = 0$ $(c \neq -1)$. Điểm $A(1;-2;0)$ thuộc d phải cách đều hai mặt phẳng đó nên : $\dfrac{|-4+c|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{|-4-1|}{\sqrt{4+1}}$ suy ra $c = 9$.

Vậy phương trình của (α') là $2y - z + 9 = 0$.

9. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;1;-1)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (1;0;-2)$, mp($\alpha$) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right] = (2;-3;1)$ nên có phương trình $2(x-2) - 3(y+1) + z = 0$ hay $2x - 3y + z - 7 = 0$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 2008 TRẦN HÙNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

b) Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d thì vectơ pháp tuyến của (β) là $\vec{u}(2;1;-1)$. Vậy (β) có phương trình $2(x-2)+y+1-z=0$ hay $2x+y-z-3=0$. Giao điểm H của (β) và d có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}\\ 2x+y-z-3=0.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $H=\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. Khoảng cách từ A đến d là $AH=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

c) Ta lấy hai điểm nào đó trên d', chẳng hạn $B(0;-3;-2)$, $C(1;-1;2)$, thì tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình của (α) nên chúng nằm trên (α), vậy (α) đi qua d'.

d) Ta có d và d' vuông góc với nhau vì chúng có các vectơ chỉ phương vuông góc với nhau. Để tìm giao điểm của chúng, ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{4}.\end{cases}$$

Ta tìm được tọa độ giao điểm là $(1;-1;2)$.

10. Ta đưa vào một hệ trục Oxyz sao cho O trùng với A, Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D và A'. Như vậy ta có $B=(a;0;0)$, $D=(0;a;0)$, $A'=(0;0;a)$, $C=(a;a;0)$, $D'=(0;a;a)$, $B'=(a;0;a)$, $C'=(a;a;a)$, $M=\left(0;\frac{a}{2};a\right)$.

a) Ta có $\overrightarrow{CB'}=(0;-a;a)$ cùng phương với vectơ $(0;-1;1)$ nên đường thẳng CB' có phương trình tham số : $x=a$, $y=a-t$, $z=t$. Điểm P nằm trên CB' sẽ có tọa độ là $P(a;a-t;t)$. Tương tự, $\overrightarrow{DC'}=(a;0;a)$ cùng phương với vectơ $(1;0;1)$ nên đường thẳng DC' có phương trình tham số : $x=t'$; $y=a$, $z=t'$, và điểm Q nằm trên DC' sẽ có tọa độ là $Q(t';a;t')$.

Khi đó $\overrightarrow{MP}=\left(a;\frac{a}{2}-t;t-a\right)=\left(a;\frac{a-2t}{2};t-a\right)$, $\overrightarrow{MQ}=\left(t';\frac{a}{2};t'-a\right)$.

Nhưng vì ba điểm M, P, Q thẳng hàng nên hai vectơ đó cùng phương, tức là:

http://sachviet.edu.vn

$$\frac{a}{t'} = \frac{a-2t}{a} = \frac{t-a}{t'-a} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = t'(a-2t) \\ a^2 = t'(2a-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -a \\ t' = \frac{a}{3}. \end{cases}$$

Vậy $P = (a;2a;-a)$ và $Q = \left(\frac{a}{3};a;\frac{a}{3}\right)$.

Từ đó : $PQ = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{29}}{3}$.

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{MP} = \left(a;\frac{3a}{2};-2a\right)$ nên có thể lấy $\vec{u} = (2;3;-4)$. Mặt phẳng (A'BD) vuông góc với AC' nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mp(A'BD) thì $\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{87}}$, do đó $\cos\varphi = \sqrt{\frac{86}{87}}$.

11. a) Gọi O là trung điểm cạnh AD (h. 68). Chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho Ox là OD, Oy là ON và Oz là OS.

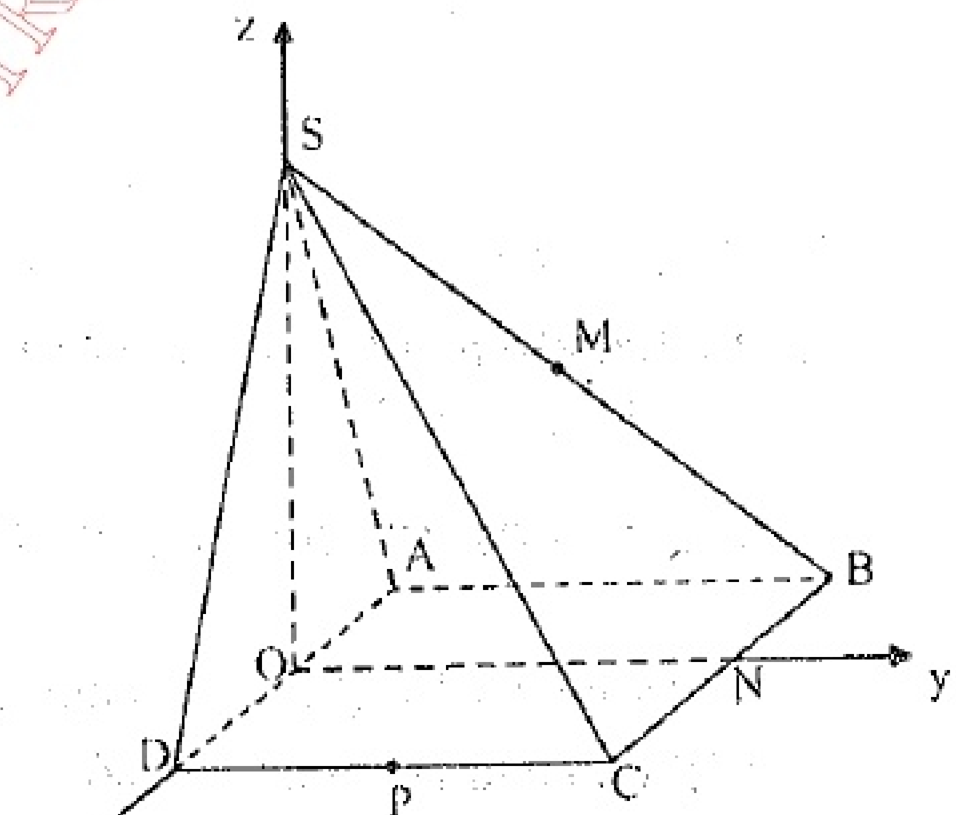
Khi đó ta có:

$O(0;0;0)$, $D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$,

$N(0;a;0)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ và

$A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

$B\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$, $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$,



Hình 68

ngoài ra vì M là trung điểm của SB, P là trung điểm của CD nên :

$M\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{BP} = \left(a;-\frac{a}{2};0\right)$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Từ đó ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 0 = 0$. Vậy $AM \perp BP$

b) Ta có $\overrightarrow{CM} = \left(-\frac{3a}{4}; -\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$; $\overrightarrow{CP} = \left(0; -\frac{a}{2}; 0\right)$.

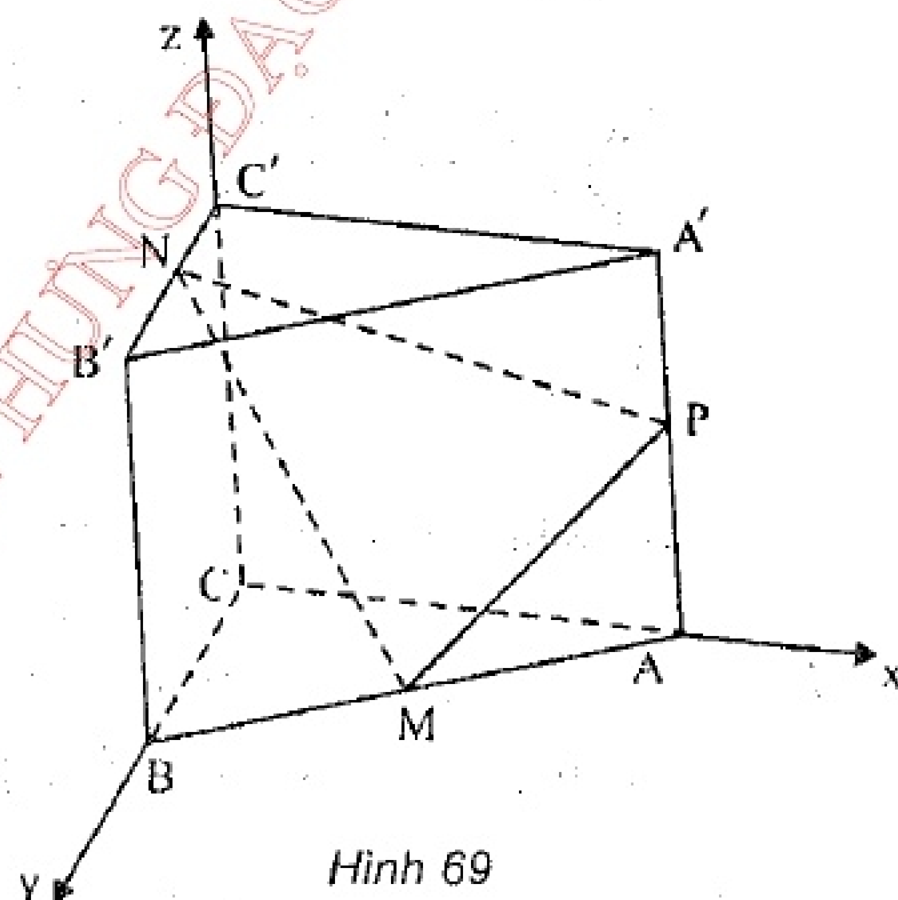
Từ đó ta tính được: $\left[\overrightarrow{CN}; \overrightarrow{CP}\right] = \left(0; 0; \frac{a^2}{4}\right)$ và $\left[\overrightarrow{CN}; \overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Vậy $V_{CMNP} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CN}; \overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}\right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

12. Chọn hệ trục Oxyz sao cho O trùng với C, Ox là CA, Oy là CB và Oz là CC' (h.69). Khi đó ta có: $C = (0;0;0)$, $A = (a;0;0)$, $B = (0;b;0)$, $C' = (0;0;c)$, $A' = (a;0;c)$, $B' = (0;b;c)$,

$M = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$, $N = \left(0; \frac{b}{2}; c\right)$,

$P = \left(a; 0; \frac{c}{2}\right)$.



Hình 69

a) Ta có

$\overrightarrow{CM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{CN} = \left(0; \frac{b}{2}; c\right)$,

$\overrightarrow{CP} = \left(a; 0; \frac{c}{2}\right)$.

Suy ra

$\left[\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CN}\right] = \left(\frac{bc}{2}; -\frac{ac}{2}; \frac{ab}{4}\right)$ và $\left[\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP} = \frac{abc}{2} + \frac{abc}{8} = \frac{5abc}{8}$.

Vậy $V_{CMNP} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP}\right| = \frac{5abc}{48}$.

b) mp(MNP) đi qua điểm $M = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$ và có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right]$. Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}; 0; c\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$. Suy ra

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right] = \left(\frac{bc}{2}; \frac{3ac}{4}; \frac{ab}{4}\right)$. Vậy mp(MNP) có phương trình:

$\frac{bc}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{3ac}{4}\left(y - \frac{b}{2}\right) + \frac{ab}{4}z = 0$. Suy ra khoảng cách h từ điểm C(0;0;0)

tới mp(MNP) là : $h = \dfrac{\left|-\frac{abc}{4} - \frac{3abc}{8}\right|}{\sqrt{\frac{b^2c^2}{4} + \frac{9a^2c^2}{16} + \frac{a^2b^2}{16}}} = \dfrac{5abc}{2\sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2 + 9a^2c^2}}$.

c) Ta có $S_{MNP} = \frac{3V_{CMNP}}{h} =$

$\frac{5abc}{16} \cdot \frac{2\sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2 + 9a^2c^2}}{5abc} = \frac{1}{8}\sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2 + 9a^2c^2}$; hoặc

$S_{MNP} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2c^2}{4} + \frac{9a^2c^2}{16} + \frac{a^2b^2}{16}} = \frac{1}{8}\sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2 + 9a^2c^2}$.

d) Khi $a = b = c$ ta có $M = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $N = \left(0; \frac{a}{2}; a\right)$, $P = \left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$.

Giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện CMNP có tâm $I(x;y;z)$ và có bán kính R, tức là : $IC^2 = IM^2 = IN^2 = IP^2 = R^2$ hay:

$$\begin{cases} IC^2 = IM^2 \\ IC^2 = IN^2 \\ IC^2 = IP^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 + (a - z)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = (a - x)^2 + y^2 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{a}{2} \\ y + 2z = \frac{5a}{4} \\ 2x + z = \frac{5a}{4} \end{cases}$$

Từ đó tìm được $x = \frac{7a}{20}$, $y = \frac{3a}{20}$, $z = \frac{11a}{20}$. Vậy $I = \left(\frac{7a}{20}; \frac{3a}{20}; \frac{11a}{20}\right)$, và

$R = IC = \sqrt{\left(\frac{7a}{20}\right)^2 + \left(\frac{3a}{20}\right)^2 + \left(\frac{11a}{20}\right)^2} = \frac{a\sqrt{179}}{20}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Phần hai

MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ SỐ 1

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1).

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2) *(1,0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 2019 = 3x^2 + 2015m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-2)^{10}(x^2 - 6x + 2014)$.

2) *(1,0 điểm)* Giải phương trình $\left[\log_7(5x-6)\right]^2 + \log_7(5x-6)^{2013} = 2014$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho hình chóp E.ABCD, có cạnh bên AE vuông góc với đáy và đáy ABCD là một hình thang cân, với đáy nhỏ BC, đáy lớn AD và AD = 2BC, AB = BC = CD.

1) *(0,5 điểm)* Chứng minh rằng EAD, EBD, ECD đều là các tam giác vuông.

2) *(0,5 điểm)* Chứng minh rằng có một mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp đã cho.

3) *(1,0 điểm)* Biết EA = b, AB = a, tính theo a, b diện tích của mặt cầu (S).

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a. *(1,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y + 2z + 4 = 0$ và điểm A(1; 1; 1). Điểm H chạy trên mặt phẳng (P). Xác định toạ độ điểm H, sao cho AH ngắn nhất.

Câu 5a. *(2,0 điểm)*

a) *(1,0 điểm)* Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho một hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x^2 + 2$, $x = 1$ và $x = 2$. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay hình (H) quanh trục Ox.

b) *(1,0 điểm)* Tìm môđun của số phức $z = (1+2i)^2 - (3-4i)^2$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 4b. *(1,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+y+z-3=0$. Gọi Δ' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (P). Tìm phương trình của Δ'.

Câu 5b. *(2,0 điểm)*

a) *(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x^4 - 5x^2 + 4$. Tính diện tích của hình (H).

b) *(1,0 điểm)* Cho số phức $z = \frac{(2+3i)^2-(1-4i)^2}{(1-2i)^2}$. Hãy tìm $|\bar{z}|$.

ĐỀ SỐ 2

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ (1).

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

2) *(1,0 điểm)* Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tung độ tiếp điểm là $y = -4$.

Câu 2. *(2,0 điểm).*

1) *(1,0 điểm)* Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$.

2) *(1,0 điểm)* Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4+x}$ trên [0 ; 5].

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho một hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy ABC là một tam giác vuông tại đỉnh B. Biết $AB = a$, $BC = 2a$ và $AA' = 3a$.

1) *(1,0 điểm)* Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

2) *(1,0 điểm)* Chứng minh rằng có một mặt cầu (S) đi qua các đỉnh của hình lăng trụ đã cho. Hãy tính theo a diện tích của mặt cầu (S).

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a. *(1,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ và điểm A(2; 2; 2). Xác định toạ độ của điểm B, đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.

LTĐH-ĐT-TOÁN-LÊ HOÀNG ... TRUNG TÂM ... TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 5a. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x^3 + x$, $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

2) *(1,0 điểm)* Với i là đơn vị ảo ($i^2 = -1$), chứng minh rằng:

$$\left(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}\right)^{2014} = -1.$$

Câu 4b. *(1,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4) và D(2; 3; 4). Hãy viết phương trình mặt cầu đi qua cả bốn điểm A, B, C, D.

Câu 5b. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \cos x + 2$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

2) *(1,0 điểm)* Với *i* là đơn vị ảo ($i^2 = -1$), chứng minh rằng

$$\left(i^{2008}+i^{2009}+i^{2010}+i^{2011}+i^{2012}+i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}+i^{2017}+i^{2018}\right)^{2014} = -1.$$

ĐỀ SỐ 3

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm).* Cho hàm số $y = \dfrac{4+x}{2+x}$.

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) *(1,0 điểm)* Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng nó song song với đường thẳng có phương trình $y = 2014 - 2x$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[x + 2e^{5x} - 3(\cos 2x)^2\right]dx$.

2) *(1,0 điểm)* Giải bất phương trình $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x^2-2014} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{x^2-2014} \le 10$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là một hình chữ nhật và cả hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết AB = a, AD = b và SA = c.

1) *(1,0 điểm)* Chứng minh rằng có một mặt cầu (T) đi qua các đỉnh của hình chóp đã cho.

2) *(1,0 điểm)* Tính theo a, b, c tỉ số giữa thể tích của khối chóp S.ABCD và thể tích của khối cầu (T).

II - PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a. *(2,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + y + z = 10$. Một mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{3}$, tâm của mặt cầu đó thuộc đường thẳng Δ và mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P). Hãy viết phương trình mặt cầu (S).

Câu 5a. *(1,0 điểm)* Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(\frac{1-7i}{12-5i}\right)^2$.

Câu 4b. *(2,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có phương trình là $2x + y + 3z = 5$ và $3x - 2y - x = 7$. Một mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng Δ đồng thời tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Hãy viết phương trình mặt cầu (S).

Câu 5b. *(1,0 điểm)* Cho số phức $z=\left(\frac{1+7i}{12+5i}\right)^2$. Hãy tìm $|\bar{z}|$.

ĐỀ SỐ 4

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y=\frac{2x-5}{x+1}$.

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) *(1,0 điểm)* Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các trục Ox, Oy.

LTĐH CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Giải bất phương trình $3^x + 4^x > 5^x$.

2) *(1,0 điểm)* Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x^4 - 10x^2 + 9$, trên đoạn $[-2; 3]$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho một hình trụ (T) có chiều cao gấp bốn lần đường kính đáy của nó và đáy của hình trụ này bằng đường tròn lớn của một hình cầu (C) bán kính R.

1) *(1,0 điểm)* Tính theo R diện tích toàn phần của hình trụ (T).

2) *(1,0 điểm)* Người ta xếp vào trong hình trụ đó 4 khối cầu (C), cùng tiếp xúc trong với mặt xung quanh hình trụ, trong đó có 2 khối cầu mỗi khối tiếp xúc với một mặt đáy của hình trụ, 2 khối cầu còn lại vừa tiếp xúc nhau, vừa tiếp xúc với một khối cầu tiếp xúc đáy của hình trụ. Hãy tính tỉ số giữa thể tích của khối trụ (T) và thể tích phần không gian nằm ngoài các khối cầu (C) và nằm trong khối trụ (T).

II - PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b).

Câu 4a. (*2,0 điểm*)

Trong không gian toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 0; 0) và hai đường thẳng (d) và (d') tương ứng có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Một đường thẳng (a) đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng (d) và (d') tương ứng tại B và C. Xác định toạ độ các điểm B và C.

Câu 5a. *(1,0 điểm)*

Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu thị số phức z mà phần ảo của nó luôn bằng 2014.

Câu 4b. (*2 điểm*)

Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng (d) và (d') tương ứng có phương trình là $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ và $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Một đường thẳng (a) vừa vuông góc và vừa cắt cả hai đường thẳng (d) và (d'). Hãy viết phương trình đường thẳng (a).

LTĐH-CĐ TOÁN LÊ HOÀNH 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 5b. *(1,0 điểm)* Trên mặt phẳng phức, hãy tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn $|z-3+4i|=2014$.

ĐỀ SỐ 5

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y=-x^4+8x^2$.

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
2) *(1,0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4+2x^2+2014m=10x^2+2015$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Giải bất phương trình: $15^x+45<9.5^x+5.3^x$.
2) *(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=0$ và $y=x^3-9x$. Tính diện tích của hình (H).

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình vuông cạnh a và các cạnh bên cùng tạo với đáy góc 60^o.

1) *(1,0 điểm)* Tính theo a thể tích của khối chóp đã cho.
2) *(1,0 điểm)* Một hình nón (N) có đỉnh là S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Tính theo a thể tích của phần không gian nằm trong khối nón (N) và nằm ngoài khối chóp S.ABCD.

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b).

Câu 4a. *(2,0 điểm)*

Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và hai điểm A(1; 6; 2), B(1; 3; −3). Một mặt cầu (S) có tâm trên đường thẳng Δ, đồng thời nó đi qua cả hai điểm A và B. Hãy viết phương trình mặt cầu (S).

Câu 5a. *(1,0 điểm)* Cho số phức $z=(4-i)^2+(1+2i)^3$. Hãy tìm $\overline{z}$.

Câu 4b. *(2,0 điểm)* Trong không gian toạ độ Oxyz, cho điểm $A(1;0;0)$, đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng (P) có phương

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 2000B LẠC LONG QUÂN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

trình $2x + y + z = -2$. Một mặt cầu (S) có tâm trên đường thẳng Δ đồng thời đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Hãy viết phương trình mặt cầu (S).

Câu 5b. *(1,0 điểm)* Viết dạng lượng giác của số phức $z = 2014\sqrt{3} + 2014i$.

ĐỀ SỐ 6

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) *(1,0 điểm)* Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = -x^4 + 4x^3 - 3$ trên đoạn $[-1; 4]$.

2) *(1,0 điểm)* Giải bất phương trình $\log_{1/\sqrt{2015}}(x^2 - 2014x) > -2$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho hình cầu (S) có tâm O bán kính R. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và cùng cách O một khoảng là h $(0 < h < R)$, chúng cắt hình cầu đã cho theo các đường tròn (t) và (t'). Gọi H và K tương ứng là tâm của các đường tròn (t) và (t'). Biết rằng điểm O nằm giữa hai điểm H và K. Gọi (T) là hình trụ có hai đáy tương ứng là các đường tròn (t) và (t').

1) *(1,0 điểm)* Tính theo R và h diện tích toàn phần của hình trụ (T).

2) *(1,0 điểm)* Tính theo R và h thể tích của phần không gian nằm trong khối cầu (S) và nằm ngoài khối trụ (T).

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a *(2,0 điểm)*

Trong không gian toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 6z + 25 = 0$ và đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-7}{3} = \frac{y-8}{4} = \frac{z+9}{12}$. Một mặt phẳng (α) vừa vuông góc với đường thẳng Δ vừa tiếp xúc với mặt cầu (S). Hãy viết phương trình mặt phẳng (α).

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ HÓA 0001 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 5a *(1,0 điểm)*

Trên mặt phẳng phức tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z mà tổng phần thực và phần ảo của số đó luôn bằng 2014.

Câu 4b *(2,0 điểm)*

Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(1; 2; 3), B(−1; 1; 1), C(2; 2; 2) và D(2; −11; 4).

1) *(1,0 điểm)* Tính thể tích của khối tứ diện ABCD.

2) *(1,0 điểm)* Xác định toạ độ điểm O sao cho OA = OB = OC = OD.

Câu 5b *(1,0 điểm)*

Với i là đơn vị ảo ($i^2 = -1$), chứng minh rằng

$$\left(\frac{i^{2016} - i^{2017}}{i^{2008} + i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}}\right)^{2014} = -1.$$

ĐỀ SỐ 7

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1 *(3,0 điểm)*. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}$.

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) *(1,0 điểm)* Bằng đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m + \frac{1}{8}$.

Câu 2 *(2,0 điểm)*.

1) *(1,0 điểm)* Giải phương trình $3\sqrt{\log_3 x} + \log_{\frac{1}{3}}(3x) = 1$.

2) *(1,0 điểm)* Tính tích phân $I = \int_1^{e^2} (1 + \ln x)x\,dx$.

Câu 3 *(2,0 điểm)*. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và BA = BC = a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích hình chóp S.ABC theo a.

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 4a *(2,0 điểm)*. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho $\overrightarrow{OI} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ (trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị tương ứng của các trục tọa độ Ox, Oy, Oz) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x - 2y - 2z - 9 = 0$.

1) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm I và tiếp xúc với (P).

2) Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 5a *(1,0 điểm)*. Xác định tọa độ các điểm biểu diễn số phức $3z + 2\bar{z}$ và $\frac{100i}{z}$, biết $z = 6 - 8i$.

Câu 4b *(2,0 điểm)*. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(−1;2;7) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

1) Hãy tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

2) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với đường thẳng d.

Câu 5b *(1,0 điểm)*. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

ĐỀ SỐ 8

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1 *(3,0 điểm)*. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

1) *(2,0 điểm)* Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) *(1,0 điểm)* Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) có tung độ bằng 5.

Câu 2 *(2,0 điểm)*.

1) *(1,0 điểm)* Giải phương trình $3^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 108$.

2) *(1,0 điểm)* Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + x)\sin x dx$.

Câu 3 *(2,0 điểm)*. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Đường chéo A'D tạo với mặt phẳng (A'AB) một góc 30^0. Tính thể tích của khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' theo a.

LTĐH CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2009 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a *(2,0 điểm).* Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(-5;0;1), B(7;4;-5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z=0$.

1) *(1,0 điểm)* Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P).

2) *(1,0 điểm)* Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của mặt cầu (S) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P). Tìm toạ độ giao điểm của d và (P).

Câu 5a *(1,0 điểm).* Tìm môđun của số phức: $z=\left(2+\sqrt{3}i\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}i\right)$.

Câu 4b *(2,0 điểm).* Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $A(0;6;4)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$.

1) *(1,0 điểm)* Hãy tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

2) *(1,0 điểm)* Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm A và tiếp xúc với đường thẳng d.

Câu 5b *(1,0 điểm).* Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình

$z^2-(3+4i)z+(-1+5i)=0$ trên tập số phức.

Hãy tính tổng $T=z_1^3+z_2^3$.

ĐỀ SỐ 9

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. (*3,0 điểm*). Cho hàm số : $y=\frac{3-2x}{x-1}$.

1) (*2,0 điểm*) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

2) (*1,0 điểm*) Tìm giá trị của m để đường thẳng $y=mx+2$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

Câu 2. (*2,0 điểm*)

1) (*1,0 điểm*) Giải bất phương trình: $4^x>2^{x+2}+32$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2) (*1,0 điểm*) Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x + \cos^2 2x\right)dx$.

Câu 3. (*2,0 điểm*) Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a.

1) (*1,0 điểm*) Tính thể tích hình chóp đó.

2) (*1,0 điểm*) Chứng tỏ rằng có một mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình chóp đã cho. Tính diện tích mặt cầu đó.

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) có phương trình : $2x + 2y + z - 12 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1;0;-4)$ và tiếp xúc với mp(P) tại điểm $B(3;4;-2)$. Tìm thể tích mặt cầu đó.

Câu 5a. (*1,0 điểm*) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \dfrac{2+3i}{(2+i)^2}$.

Câu 4b. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình :

$$\Delta: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-2} = z+1 \qquad \Delta': \begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \\ z = -5-2t \end{cases}$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) song song và cách đều hai đường thẳng đó.

2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ'.

Câu 5b. *(1,0 điểm)* Rút gọn số phức $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2011}$

ĐỀ SỐ 10

I – PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): x+12y+13=0$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)* Giải phương trình $5x^2+y^2-4xy+4x+4=0$.

2) *(1,0 điểm)* Tính tích phân $I=\int_0^1\left(8x^3-2x\right)e^{x^2}dx$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Gọi M là trung điểm cạnh AA'. Tính theo a khoảng cách từ điểm B tới mp(MB'D').

II – PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần cho chương trình chuẩn 4a, 5a; phần cho chương trình nâng cao 4b, 5b)

Câu 4a. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho tam giác ABC với $A=(2;0;0)$, đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;1;2)$, đường thẳng AC có vectơ chỉ phương $\vec{v}(3;1;-4)$, trung điểm của cạnh BC là điểm $M(1;0;3)$. Hãy viết phương trình đường thẳng BC.

Câu 5a. *(1,0 điểm)* Cho số phức z thoả mãn $z-1=\dfrac{z-18}{z-2}$. Tìm mô đun của số phức $w=\bar{z}+2i$.

Câu 4b. *(2,0 điểm)*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, với mỗi cặp số m và n, xét mặt cầu có phương trình : $x^2+y^2+z^2+2mx+2ny-2(m+n)z-2(m+n+1)=0$.

1) Chứng tỏ rằng tâm các mặt cầu đó nằm trên một mặt phẳng cố định.

2) Tìm những điểm cố định mà các mặt cầu ấy đi qua.

Câu 5b. *(1,0 điểm)* Giải phương trình sau đây trên tập số phức :

$$z^2-3z+2+3\sqrt{2}\,i=0.$$

LTĐH-CĐ TOÁN LÝ HÓA 2000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1) *(2,0 điểm)*

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên: $y'(x) = 3x^2 - 6x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Suy ra $y'(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, $y'(x) < 0$ khi $x \in (0; 2)$.

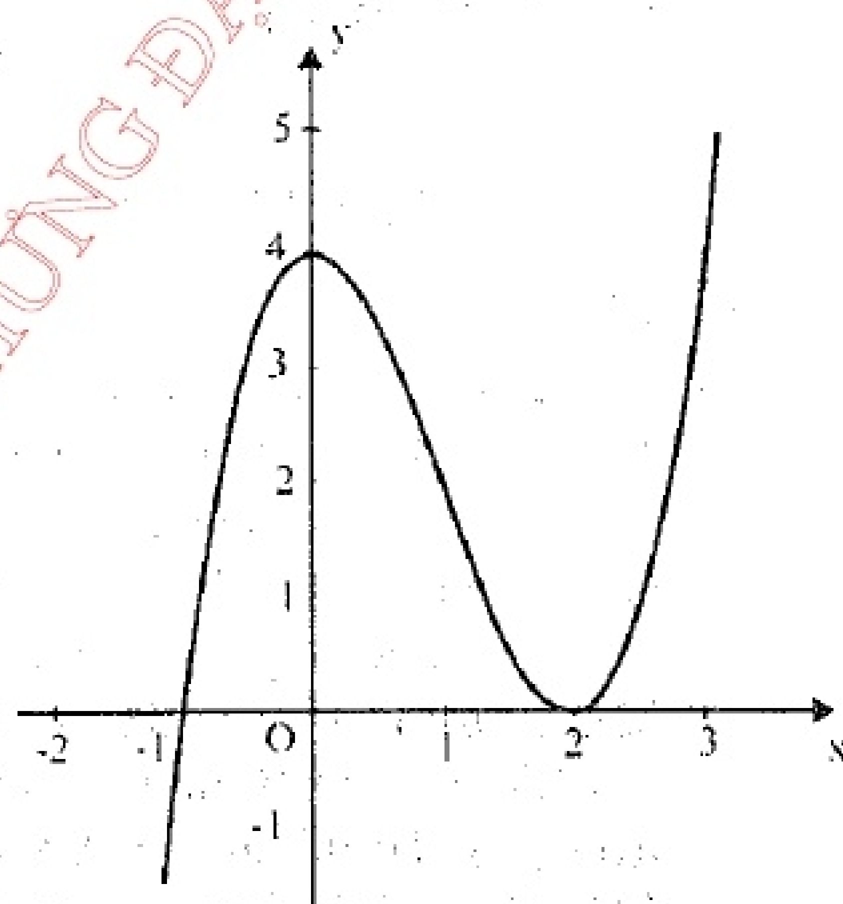
Từ đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là: CĐ (0; 4), CT(2;0).

Giới hạn vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$



Hình 70

Đồ thị: như hình bên.

2) *(1,0 điểm)*

Ta có $x^3 + 2019 = 3x^2 + 2015m$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 2015m - 2015$.

Từ đó, phương trình $x^3 + 2019 = 3x^2 + 2015m$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = 2015m - 2015$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị như đã vẽ ở trên, còn $y = 2015m - 2015$ là những đường thẳng song song (hoặc trùng) với trục Ox.

Dựa vào đồ thị, phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = 2015m - 2015$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < 2015m - 2015 < 4$ hay $1 < m < \dfrac{2019}{2015}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Đặt $t = x - 2$, ta có $x = t + 2$, suy ra $dt = dx$ và

$$x^2 - 6x + 2014 = (t+2)^2 - 6(t+2) + 2014 = t^2 - 2t + 2006.$$

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Từ đó,

$$\int(x-2)^{10}(x^2-6x+2014)dx=\int t^{10}\left(t^2-2t+2006\right)dt=\int\left(t^{12}-2t^{11}+2006t^{10}\right)dt=$$

$$=\frac{t^{13}}{13}-2\frac{t^{12}}{12}+2006\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{(x-2)^{13}}{13}-\frac{(x-2)^{12}}{6}+2006\frac{(x-2)^{11}}{11}+C.$$

2) *(1,0 điểm)*

Điều kiện : $x>\frac{6}{5}$.

Đặt $t=\log_7(5x-6)$ thì phương trình đã cho trở thành: $t^2+2013t-2014=0$.

Giải phương trình này tìm được $t=1$ và $t=-2014$.

Với $t=1$ ta tìm được $x=\frac{13}{5}$, còn với $t=-2014$ tìm được $x=\frac{6+7^{-2014}}{5}$.

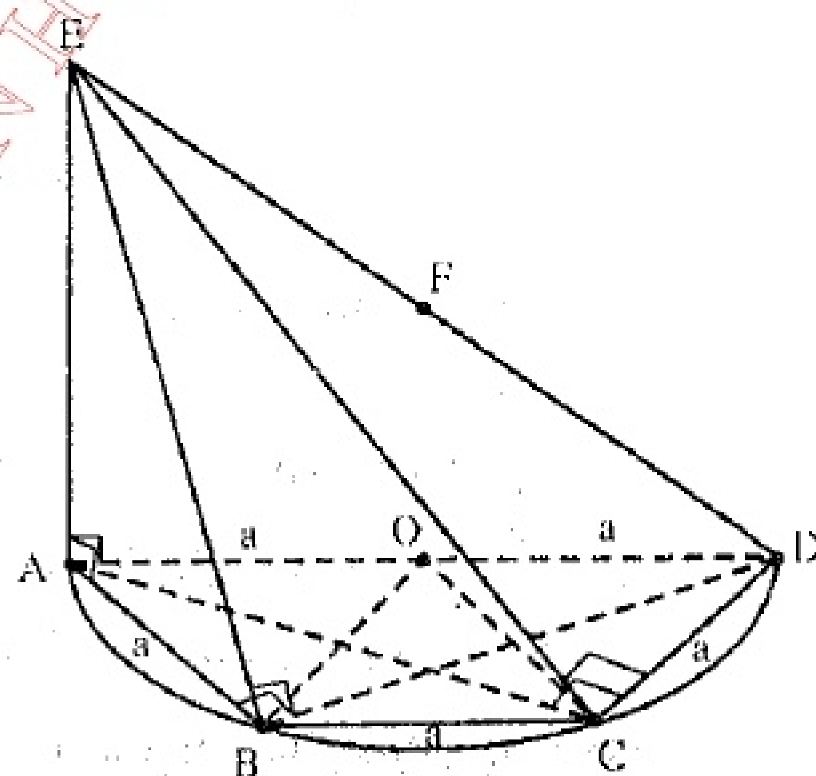
Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{13}{5}$ và $x=\frac{6+7^{-2014}}{5}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*: xem hình bên.

1) *(0,5 điểm)*

Theo giả thiết EA vuông góc với đáy, suy ra EAD là tam giác vuông đỉnh A.

Gọi O là trung điểm của AD, theo giả thiết có AOCB và BCDO là các hình bình hành. Suy ra OA = OD = OB = OC = a. Tức là, ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn (O). Từ đó suy ra AB vuông góc với BD. Theo định lí ba đường vuông góc suy ra EB vuông góc với BD. Như vậy, EBD là tam giác vuông đỉnh B.



Hình 71

Tương tự, từ ABCD là tứ giác nội tiếp (O) có AC vuông góc với CD, suy ra EC vuông góc với CD. Từ đó, ECD là tam giác vuông đỉnh C.

2) *(0,5 điểm)*

Theo câu 1 có EAD, EBD, ECD đều là các tam giác vuông có chung cạnh huyền ED. Nếu gọi F là trung điểm ED ta có FA = FB = FC = FD = FE. Vậy F là tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp đã cho.

3) *(1,0 điểm)*

Trong tam giác vuông EAD tính được $ED=\sqrt{AD^2+EA^2}=\sqrt{(2a)^2+b^2}$.

Suy ra diện tích mặt cầu (S) bằng $\pi(4a^2+b^2)$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÊ HOÀNH PHÒ TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 4a. *(1, 0 điểm)*

Với điểm H bất kì thuộc (P) thì AH ngắn nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) thì H là giao điểm của d và (P).

Phương trình của đường thẳng d là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

H thuộc (P) nên có hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \\ (1 + t) - (1 - t) + 2(1 + 2t) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases},$$

Vậy, H(0; 2; −1).

Câu 5a. (*2,0 điểm*)

a) *(1,0 điểm)*

Thể tích cần tính là $V = \pi\int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{293\pi}{15}$.

b) *(1,0 điểm)*

Do $z = (1 + 2i)^2 - (3 - 4i)^2 = (1 + 4i + 4i^2) - (9 - 24i + 16i^2) = 4 + 28i$, nên

$|z| = \sqrt{4^2 + 28^2} = 20\sqrt{2}$.

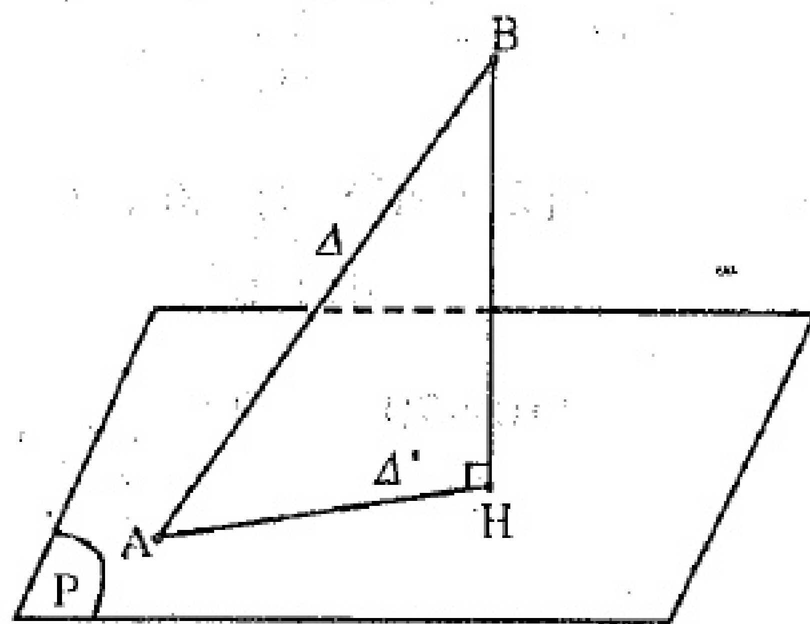
Câu 4b. *(1,0 điểm)*

Dễ tìm được A(1 ; 1; 1) là giao điểm của Δ và (P).

Lấy B(2; 3; 4) trên Δ.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên (P) thì AH chính là hình chiếu của Δ trên (P).

Gọi d là đường thẳng đi qua B và d vuông góc với (P) thì H là giao điểm của d và (P) (h.72).



Hình 72

LTĐH CẤP TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Phương trình của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$.

H thuộc (P) nên có hệ

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \\ (2+t) + (3+t) + (4+t) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = -2 \end{cases},$$

Vậy, H(0; 1; 2).

Đường thẳng Δ' có phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

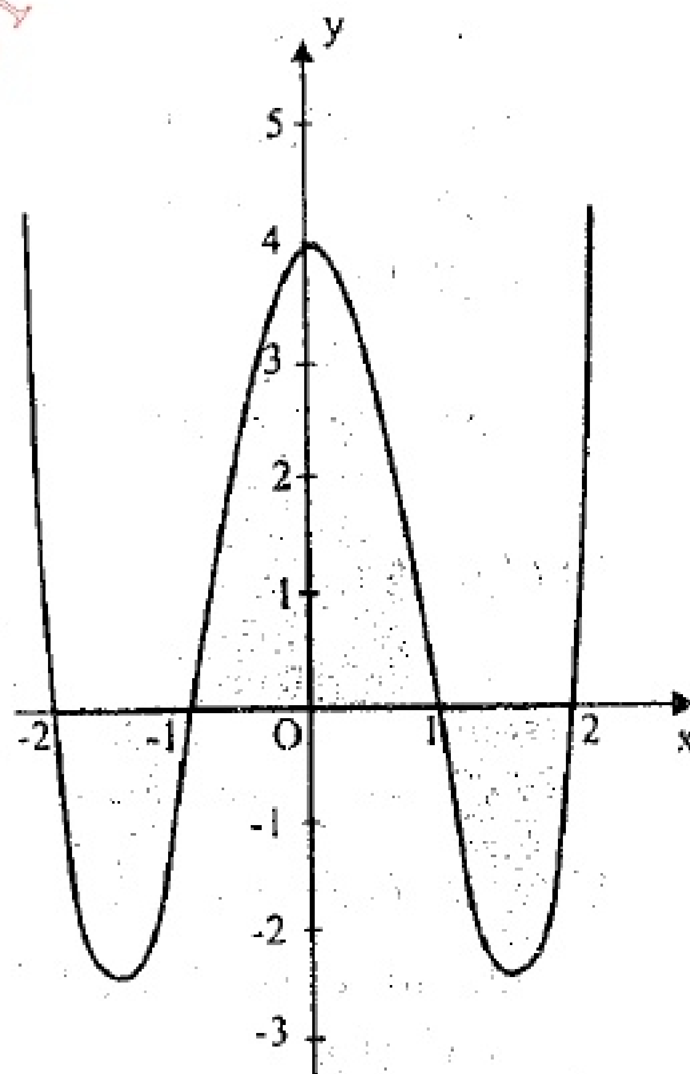
Câu 5b. *(2, 0 điểm)*

a) *(1,0 điểm)*

Do tính đối xứng của đồ thị (h.73) suy ra diện tích cần tính là

$$S = 2\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)dx - 2\int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_0^1 - 2\left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_1^2 = 8.$$



Hình 73

b) *(1,0 điểm)*

Ta có $z = \dfrac{(2+3i)^2 - (1-4i)^2}{(1-2i)^2} =$

$$\frac{(4 + 12i + 9i^2) - (1 - 8i + 16i^2)}{1 - 4i + 4i^2} = -\frac{10 + 20i}{3 + 4i} =$$

$= -\dfrac{110 + 20i}{25} = -\dfrac{22}{5} - \dfrac{4}{5}i$. Suy ra $|\bar{z}| = \sqrt{\left(-\dfrac{22}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = 2\sqrt{5}$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1) *(2,0 điểm)*

Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên: $y'(x) = -3x^2 + 6x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Suy ra $y'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, $y'(x) > 0$ khi $x \in (0; 2)$.

Từ đó, hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị là: CT(0;–4), CĐ(2; 0).

Giới hạn vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$+\infty$	↘	–4	↗	0	↘	$-\infty$

Đồ thị: như hình 74.

2) *(1,0 điểm)*

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, khi đó x_0 là nghiệm của phương trình $y_0 = y(x_0) = -4$

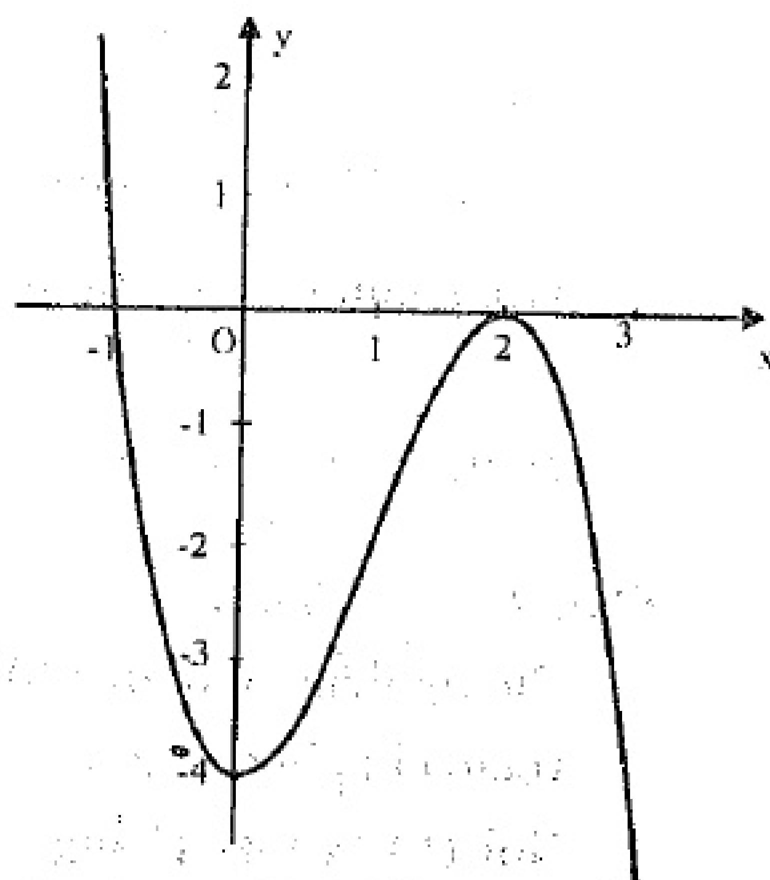
hay $-x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = -4 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 = 0$.

Giải phương trình này ta tìm được 2 nghiệm là $x_0 = 0$ và $x_0 = 3$.

Với $x_0 = 0$ thì $y'(x_0) = y'(0) = 0$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -4$.

Với $x_0 = 3$ thì $y'(x_0) = y'(3) = -9$, ta có phương trình tiếp tuyến là

$$y + 4 = -9(x - 3) \text{ hay } y = -9x + 23.$$



Hình 74

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Ta có $\dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO-TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Suy ra: $\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \tan x - \cot x + C.$

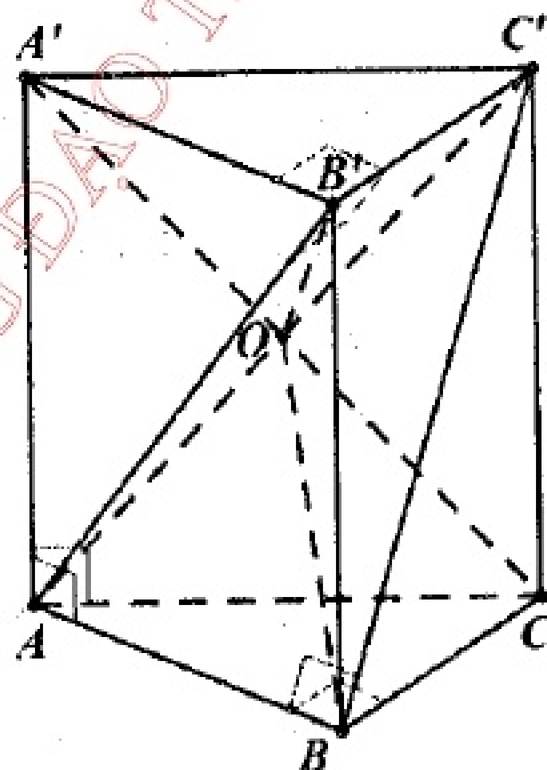
2) *(1,0 điểm)*

Vì trên đoạn [0 ; 5] thì $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{4+x}} > 0$, nên hàm số đồng biến trên [0 ; 5].

Từ đó, $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5) = 8$ và $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0) = 2$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Xem hình bên.



Hình 75

1) *(1,0 điểm)* Ta có thể tích của khối ABC.A'B'C' là

$V = \frac{1}{2}(AB.BC).AA' = \frac{1}{2}(a.2a).3a = 3a^3$.

2) *(1,0 điểm)* Theo giả thiết có ngay ACC'A' là hình chữ nhật.

Hơn nữa, theo giả thiết và dựa vào định lí ba đường vuông góc ta chứng minh được C'BA và AB'C' là các tam giác vuông.

Khi đó, gọi O là giao điểm của AC' và CA' thì OA = OC' = OC = OA' = OB = OB'. Suy ra mặt cầu tâm O đi qua cả 6 điểm A, B, C, A', B', C'.

Trong tam giác vuông ACC' tính được $AC' = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2} = a\sqrt{14}$.

Từ đó, diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi\left(\frac{AC'}{2}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2 = 14\pi a^2$.

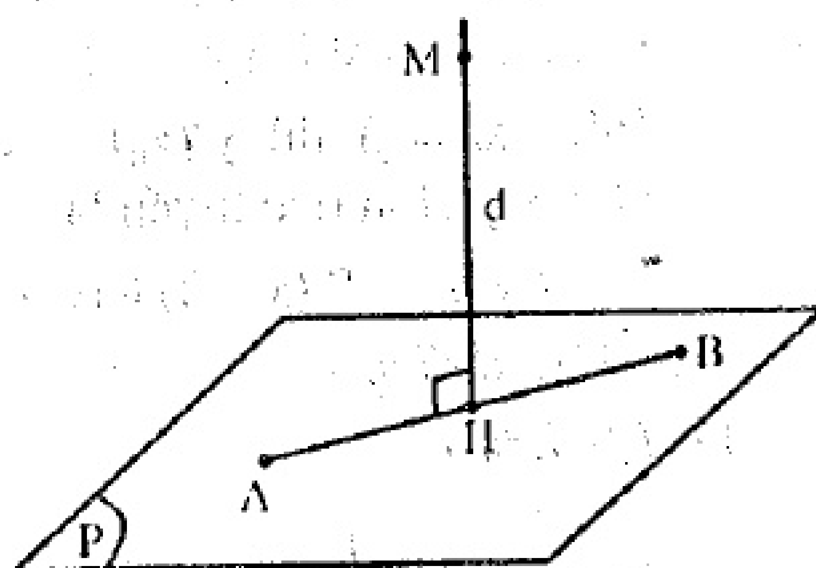
Câu 4a. *(1,0 điểm)*

Đường thẳng d đi qua M (1 ; 1 ; 0) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(2;1;3)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với d (h.76). Gọi H là giao điểm của d và (P) thì H là hình chiếu vuông góc của A trên d và H là trung điểm của AB.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$2x + y + 3z - 12 = 0$.



Hình 76

LTĐH CÔ TOÁN - LÍ - HÓA 100 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

H thuộc (P) nên có hệ: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3t \\ 2x + y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$

Giải hệ tìm được $x = \frac{16}{7}$, $y = \frac{23}{14}$, $z = \frac{27}{14}$.

Vậy, $H\left(\frac{16}{7}; \frac{23}{14}; \frac{27}{14}\right)$. Từ đó tìm được: $B\left(\frac{18}{7}; \frac{9}{7}; \frac{13}{7}\right)$.

Câu 5a. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Thể tích vật thể cần tìm là:

$$V = \pi\int_0^1 \left(x^3 + x\right)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^6 + 2x^4 + x^2)dx = \pi\left(\frac{x^7}{7} + 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{92\pi}{105}.$$

2) *(1,0 điểm)*

Ta có $\left(1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10}\right) =$

$$= \left(1 + i + i^2 + i^3 + i^4\right) + i^5\left(1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5\right) = 1 + i(1+i) = i,$$

nên $\left(1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10}\right)^{2014} = i^{2014} = i^{2012}.i^2 = -1$.

Câu 4b. *(1,0 điểm)*

Từ giả thiết suy ra A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình hộp chữ nhật, với ba kích thước tương ứng là OA = 2; OB = 3 và OC = 4, trong đó O là gốc toạ độ (xem hình bên).

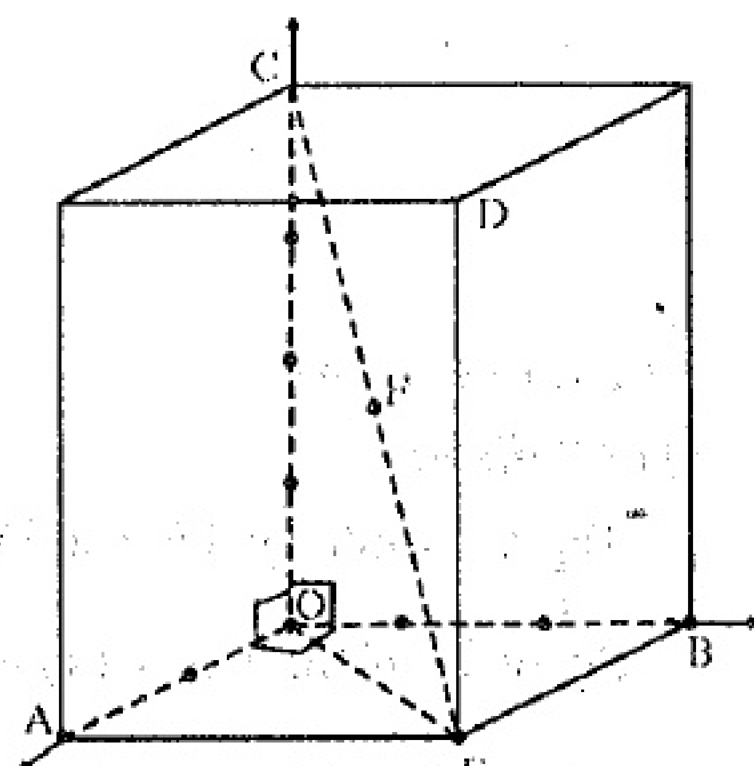
Gọi E(2; 3; 0).

Gọi F là trung điểm của CE, thì

FA = FB = FC = FD = FE.

Vậy F chính là tâm của mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D.

Do F là trung điểm của CE nên xác định được $F(1; \frac{3}{2}; 2)$.



Hình 77

LTĐH-CĐ - TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Trong tam giác vuông COE tính được $CE = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

Từ đó, mặt cầu cần tìm có tâm F, bán kính $\frac{CE}{2}$, có phương trình:

$$(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}.$$

Câu 5b. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Thể tích của vật thể cần tính là:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x + 2)^2\,dx = \pi\left(\frac{9x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + 4\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi(16+9\pi)}{4}.$$

2) *(1,0 điểm)*

Ta có $\left(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}\right)=$

$=\left(1+i+i^2+i^3+i^4\right)+i^5\left(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5\right)=1+i(1+i)=i$, nên

$\left(i^{2008}+i^{2009}+i^{2010}+i^{2011}+i^{2012}+i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}+i^{2017}+i^{2018}\right)=$

$=i^{2008}\left(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}\right)=i$.

Suy ra

$\left(i^{2008}+i^{2009}+i^{2010}+i^{2011}+i^{2012}+i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}+i^{2017}+i^{2018}\right)^{2014}=$

$=i^{2012}.i^2=-1$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1) *(2,0 điểm)*

Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Sự biến thiên: Do $y'(x)=\frac{-2}{(x+2)^2}<0$ trên tập xác định, nên hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định và nó không có điểm cực trị.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

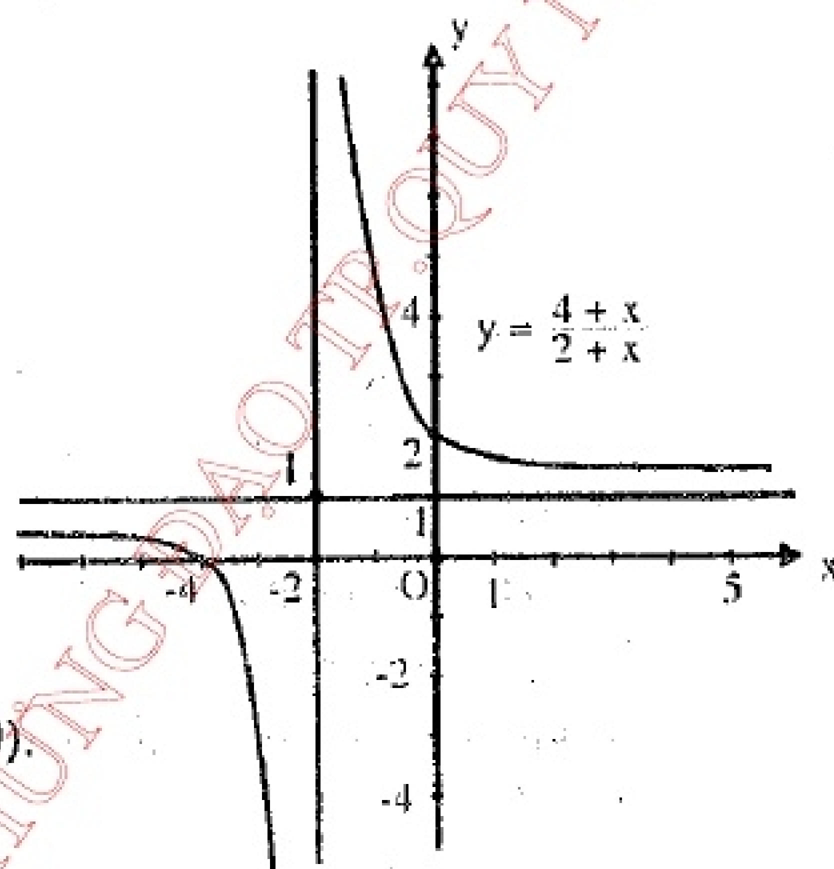
http://sachviet.edu.vn

Do $\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$ nên đồ thị của hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Vì $\lim_{x \to (-2)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \to (-2)^-} y = -\infty$, nên đồ thị của hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$



Hình 78

Đồ thị: (h.78)

Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục Oy tại điểm (0; 2) và cắt trục Ox tại điểm (–4; 0). Đồng thời đồ thị còn nhận điểm I(–2; 1), là giao điểm của hai đường tiệm cận, làm tâm đối xứng.

2) *(1,0 điểm)*

Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm.

Khi đó, x_0 là nghiệm của phương trình $y'(x_0) = -2$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0+2)^2} = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -3$ thì $y_0 = y(-3) = -1$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -2x - 7$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = y(-1) = 3$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -2x + 1$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1, 0 điểm)* Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[x + 2e^{5x} - 3(\cos 2x)^2\right] dx =$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}e^{5x} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32} + \frac{2e^{\frac{5\pi}{4}}}{5} - \frac{3\pi}{8} - \frac{2}{5}.$$

2) *(1, 0 điểm)*

Ta có $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 1$.

LTĐH CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100đ TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Đặt $t = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{x^2-2014}$ thì $t > 0$ và $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{x^2-2014} = \frac{1}{t}$.

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$t + \frac{1}{t} \le 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 1 \le 0 \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{6} \le t \le 5 + 2\sqrt{6}$.

Từ đó $-1 \le x^2 - 2014 \le 1 \Leftrightarrow 2013 \le x^2 \le 2015$ hay $\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2015} \le x \le -\sqrt{2013} \\ \sqrt{2013} \le x \le \sqrt{2015} \end{array}\right.$.

Câu 3. *(2, 0 điểm)*

1) *(1, 0 điểm)*

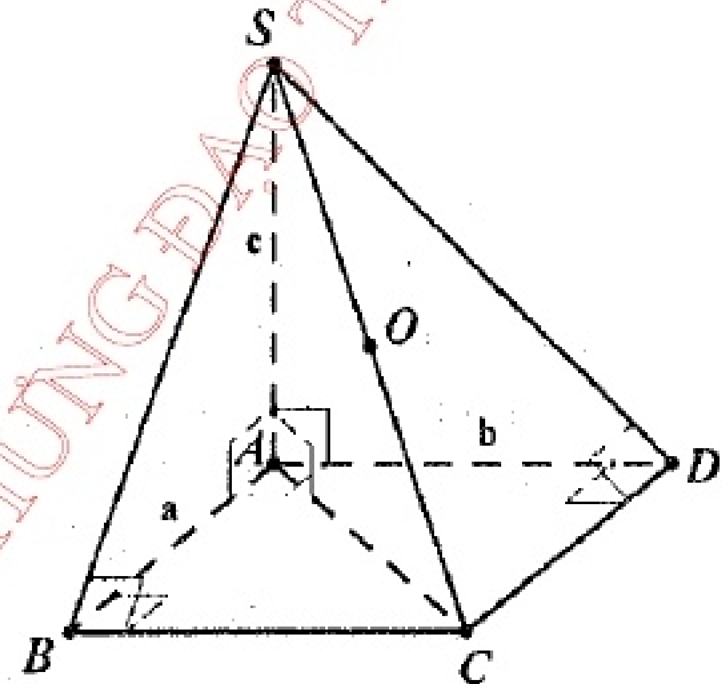
Từ giả thiết suy ra SA vuông góc với (ABCD), tức là SA vuông góc với AC (*xem h.79*).

Do AB vuông góc với BC, theo định lí ba đường vuông góc suy ra SB vuông góc với BC.

Tương tự chứng minh được SD vuông góc với CD.

Từ đó, SAC, SBC và SDC là các tam giác vuông, có chung cạnh huyền SC.

Gọi O là trung điểm của SC thì OS = OC = OA = OD = OB. Suy ra O là tâm mặt cầu (T) đi qua các đỉnh của hình chóp đã cho.



Hình 79

2) *(1, 0 điểm)*

Trong tam giác vuông SAC ta có $SC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Từ đó, tỉ số giữa thể tích của khối chóp S.ABCD và thể tích khối cầu (T) là:

$$\frac{V_{ch}}{V_c} = \frac{\frac{1}{3}.(a.b).c}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\right)^3} = \frac{2abc}{\pi\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^3}.$$

Câu 4a. *(2, 0 điểm)*

Gọi I là tâm mặt cầu (S).

Do I thuộc đường thẳng Δ, suy ra $I(-1 + t; -1 + 2t; -1 - t)$.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{3}$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên có: $d(I; (P)) = \sqrt{3}$ hay

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$\frac{|1.(-1+t)+1.(-1+2t)+1.(-1-t)-10|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow|2t-13|=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t-13=3\\2t-13=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=8\\t=5\end{array}\right..$$

Với t = 8 tìm được I(7; 15; –9), nên có phương trình mặt cầu

$$(x-7)^2+(y-15)^2+(z+9)^2=3.$$

Với t = 5 tìm được I(4; 9; –6), nên có phương trình mặt cầu

$$(x-4)^2+(y-9)^2+(z+6)^2=3.$$

Câu 5a. *(1,0 điểm)*

Ta có $\frac{1-7i}{12-5i}=\frac{1-7i}{12-5i}.\frac{12+5i}{12+5i}=\frac{12+5i-84i-35i^2}{12^2-(5i)^2}=\frac{47-79i}{169}=\frac{47}{169}-\frac{79}{169}i$.

Từ đó,

$$z=\left(\frac{1-7i}{12-5i}\right)^2=\left(\frac{47}{169}-\frac{79}{169}i\right)^2=\frac{2209}{28561}-\frac{7426}{28561}i-\frac{6241}{28561}=-\frac{4032}{28561}-\frac{7426}{28561}i$$

Suy ra, số phức này có phần thực là $-\frac{4032}{28561}$ và phần ảo là $-\frac{7426}{28561}$.

Câu 4b. *(2,0 điểm)*

Gọi I là tâm mặt cầu (S).

Do I thuộc đường thẳng Δ, suy ra I(1 + 2t; –1 + t; –1 – t).

Mặt cầu (S) tiếp xúc với với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có:

d(I; (P)) = d(I; (Q)).

Từ đó có

$$\frac{|2.(1+2t)+1.(-1+t)+3.(-1-t)-5|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{|3.(1+2t)-2.(-1+t)-1.(-1-t)-7|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}$$

$$\Leftrightarrow|2t-7|=|5t-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t-7=5t-1\\2t-7=1-5t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=\frac{8}{7}\end{array}\right..$$

Với t = –2 tìm được I(–3; –3; 1) và $R=\frac{11}{\sqrt{14}}$ nên có phương trình mặt cầu

$$(x+3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\frac{121}{14}.$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LỚP 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Với $t = \dfrac{8}{7}$ tìm được $I\left(\dfrac{23}{7}; \dfrac{1}{7}; -\dfrac{15}{7}\right)$ và $R = \dfrac{33}{7\sqrt{14}}$ nên có phương trình mặt cầu $\left(x - \dfrac{23}{7}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{7}\right)^2 + \left(z + \dfrac{15}{7}\right)^2 = \dfrac{1089}{686}$.

Câu 5b. *(1,0 điểm)*

Ta có $\dfrac{1+7i}{12+5i} = \dfrac{1+7i}{12+5i} \cdot \dfrac{12-5i}{12-5i} = \dfrac{12-5i+84i-35i^2}{12^2-(5i)^2} = \dfrac{47+79i}{169}$

$= \dfrac{47}{169} + \dfrac{79}{169}i$.

Từ đó,

$$z = \left(\frac{1+7i}{12+5i}\right)^2 = \left(\frac{47}{169} + \frac{79}{169}i\right)^2 = \frac{2209}{28561} + \frac{7426}{28561}i - \frac{6241}{28561} = -\frac{4032}{28561} + \frac{7426}{28561}i$$

Suy ra $|\bar{z}| = \sqrt{\left(-\dfrac{4032}{28561}\right)^2 + \left(-\dfrac{7426}{28561}\right)^2} = \dfrac{50}{169}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1) *(2,0 điểm) :*

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: $y'(x) = \dfrac{7}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \neq -1$.

Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, đồng thời nó không có cực trị.

Vì $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} y$ nên đồ thị của hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Bảng biến thiên :

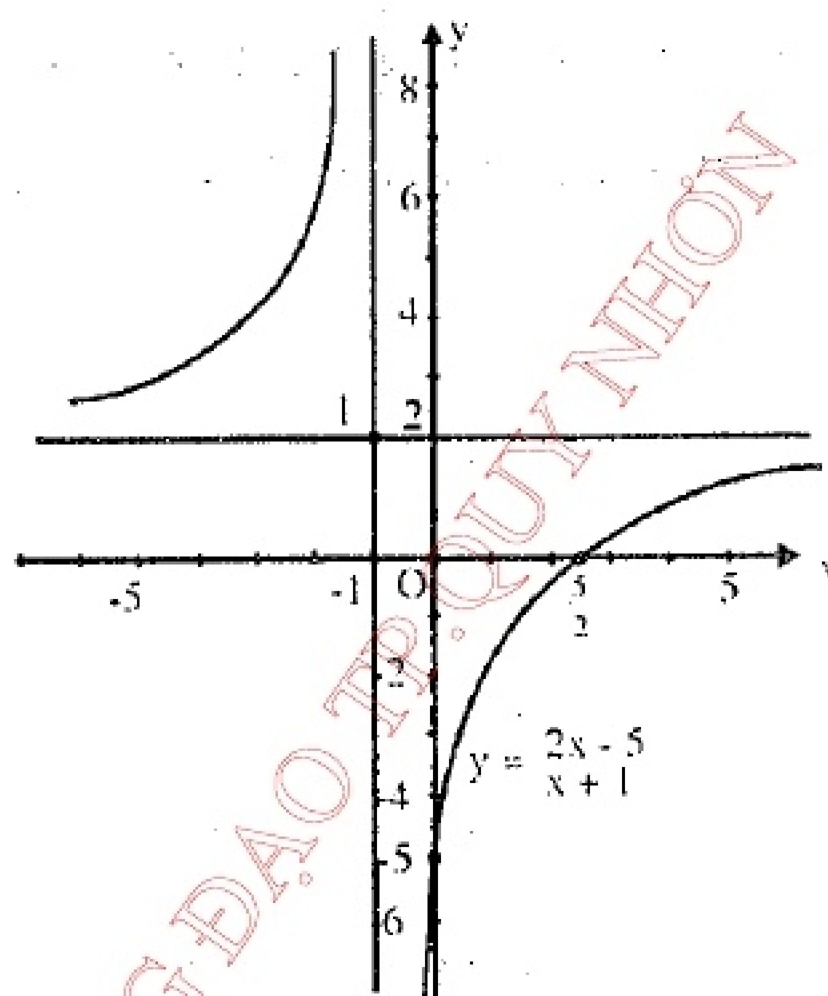
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Đồ thị: Hình 80.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; – 5), cắt trục hoành tại điểm $(\frac{5}{2}; 0)$ và nó nhận giao điểm của hai đường tiệm cận I(–1; 2) làm tâm đối xứng.



Hình 80

2) *(1,0 điểm)*

Diện tích cần tính là

$$S = -\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{2x-5}{x+1}dx = -\left(2x - 7\ln(x+1)\right)\Big|_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= -5 + 7\ln\frac{7}{2}.$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Gọi $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và f(2) = 1.

Hơn nữa, có $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0, \quad \forall x$.

Do đó, f(x) luôn nghịch biến. Suy ra f(x) > f(2) ⇔ x < 2.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-\infty; 2)$.

Lưu ý. Có thể nhận xét $\frac{3}{5} < 1$, $\frac{4}{5} < 1$ suy ra f(x) nghịch biến.

2) *(1,0 điểm)*

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-2		0		$\sqrt{5}$		3		$+\infty$
y'		–	0	+		+	0	–	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	-16	↗		↗	9	↘	-16	↗		↗	$+\infty$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN TRUNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Khi đó:

$\text{Max}f(x) = \max\{f(-2); f(0); f(3)\} = \max\{-15; 9; 0\} = 9$.

$\text{Min}f(x) = \min\{f(-2); f(\sqrt{5}); f(3)\} = \min\{-15; -16; 0\} = -16$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Ta có bán kính đáy của hình trụ đã cho là R, còn chiều cao của hình trụ đó là 8R.

Suy ra diện tích toàn phần của hình trụ đó là:

$$S_{TP} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi R.8R + 2\pi.R^2 = 18\pi R^2.$$

2) *(1,0 điểm)*

Thể tích của khối trụ đó là: $V_T = \pi.R^2.8R = 8\pi R^3$.

Thể tích của một khối cầu là: $V_c = \frac{4}{3}.\pi.R^3$.

Suy ra thể tích phần không gian nằm ngoài các khối cầu và nằm trong khối trụ đã cho là: $V_T - 4V_c = 8\pi R^3 - 4.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$.

Vậy, tỉ số giữa thể tích hai phần là: $\dfrac{V_T}{V_T - 4V_c} = \dfrac{8\pi R^3}{\frac{8}{3}\pi R^3} = 3$.

Câu 4a. *(2,0 điểm)*

Vì $B \in (d)$ nên $B = (1+t; 1+2t; 1+t)$.

Do $C \in (d')$ nên $C = (1+t'; -1-t'; 1-t')$.

Từ đó tính được $\overrightarrow{AB} = (t; 1+2t; 1+t)$, $\overrightarrow{AC} = (t'; -1-t'; 1-t')$.

Vì ba điểm A, B, C thẳng hàng (cùng thuộc đường thẳng a) và $A \neq C$ nên phải có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, tức là có:

$$\begin{cases} t = k.t' \\ 1+2t = k(-1-t') \\ 1+t = k(1-t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k.t' \\ 1+2t = -k-t \\ 1+t = k-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k.t' \\ 1+3t = -k \\ k = 2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{5} \\ t = -\frac{2}{5} \\ t' = -2 \end{cases}$$

Từ đó, tìm được $B = \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $C = (-1; 1; 3)$.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 5a. *(1,0 điểm)*

Gọi z = a + bi.

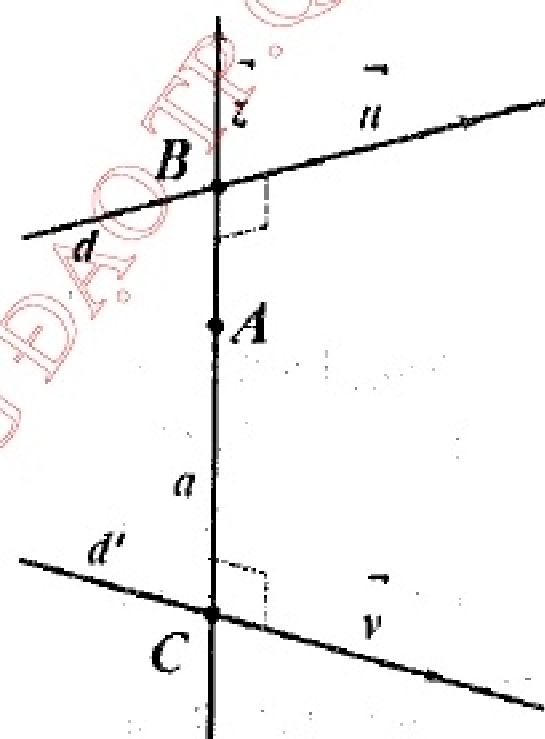
Theo giả thiết phải có b = 2014.

Vậy tập hợp các điểm thoả mãn bài toán là đường thẳng y = 2014 (song song với trục Ox).

Câu 4b. *(2,0 điểm)*

Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;-1)$.

Đường thẳng (d') có một vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(1;1;-1)$.



Hình 81

Đường thẳng (a) thoả mãn bài toán phải có một vectơ chỉ phương $\vec{z}$ cùng phương với vectơ $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(3;0;3)$ (h.81). Chọn $\vec{z}=(1;0;1)$

Gọi B và C tương ứng là giao điểm của (a) với (d) và (d') thì phải có:

$$\begin{cases} B\in(d) \\ C\in(d') \\ \overrightarrow{BC}=k\vec{z}\ (k\in\mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(2+t;1-2t;3-t) \\ C(-1+t';1+t';-1-t') \\ \overrightarrow{BC}=k\vec{z} \end{cases}$$

Ta có hệ: $\begin{cases} 3+t-t'=k \\ -2t-t'=0 \\ 4-t+t'=k \end{cases}$

Giải hệ tìm được $t=\frac{1}{6}$, $t'=-\frac{1}{3}$, $k=\frac{7}{2}$.

Suy ra $B=\left(\frac{13}{6};\frac{4}{6};\frac{17}{6}\right)$, $C=\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Từ đó, phương trình đường thẳng cần tìm là $x=\frac{13}{6}+t$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{17}{6}+t$.

Câu 5b. *(1,0 điểm)*

Trên mặt phẳng phức, nếu điểm M biểu diễn số phức z = a + bi thì M(a; b).

Khi đó $z-3+4i=(a-3)+(b+4)i$.

Từ đó $|z-3+4i|=2014 \Leftrightarrow (a-3)^2+(b+4)^2=4056196$.

Vậy tập các điểm M biểu diễn số phức z thoả mãn bài toán là đường tròn có phương trình $(x-3)^2+(y+4)^2=4056196$.

LTĐH CẤP TOÁN - LÝ HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

ĐỀ SỐ 5

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1) *(2,0 điểm)*

Hàm số đã cho xác định trên tập $\mathbb{R}$.

Vì $y(x) = y(-x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho là một hàm số chẵn, suy ra đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy.

Sự biến thiên: $y' = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Khi đó, ta có $y'(x) < 0$ với $x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$, còn $y'(x) > 0$ khi $x \in (-\infty;-2) \cup (0;2)$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

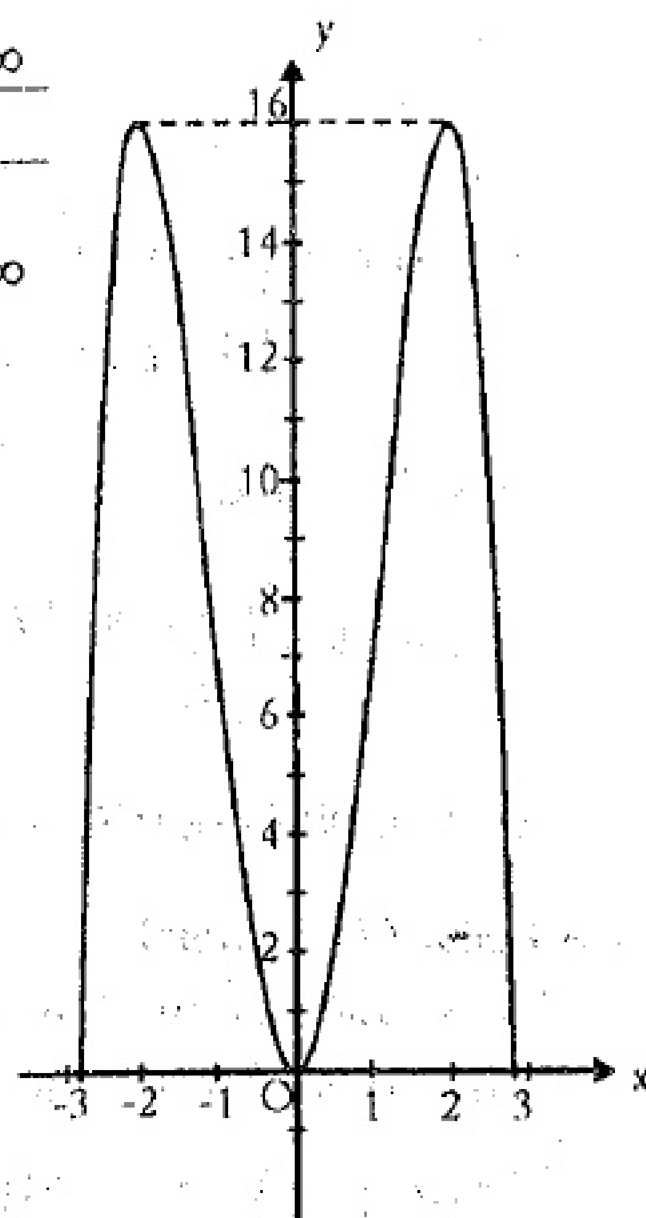
Hàm số đã cho đạt giá trị cực tiểu $y = 0$ khi $x = 0$ và đạt giá trị cực đại $y = 16$ khi $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Giới hạn vô cực: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	16	↘	0	↗	16	↘	$-\infty$

– Đồ thị như hình bên.



Hình 82

Nhận xét: Đồ thị của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại điểm (0; 0) và giao với trục hoành tại các điểm $(-2\sqrt{2}; 0)$, $(2\sqrt{2}; 0)$, hơn nữa nó nhận trục Oy làm trục đối xứng.

2) *(1,0 điểm)*

Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng

$-x^4 + 8x^2 = 2014m - 2015$.

Từ đó, phương trình

$x^4 + 2x^2 + 2014m = 10x^2 + 2015$ có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình

$-x^4 + 8x^2 = 2014m - 2015$ có 4 nghiệm phân biệt.

LTĐH-CĐ TOÁN-LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Hàm số $y = -x^4 + 8x^2$ có đồ thị như đã vẽ ở phần trên, còn hàm số $y = 2014m - 2015$ có đồ thị là những đường thẳng song song (hoặc trùng) với trục Ox.

Căn cứ đồ thị thì phương trình $x^4 + 2x^2 + 2014m = 10x^2 + 2015$ có 4 nghiệm phân biệt khi $0 < 2014m - 2015 < 16$, hay $\dfrac{2015}{2014} < m < \dfrac{2031}{2014}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Ta có $15^x + 45 < 9.5^x + 5.3^x \Leftrightarrow (3^x - 9)(5^x - 5) < 0 \Leftrightarrow$

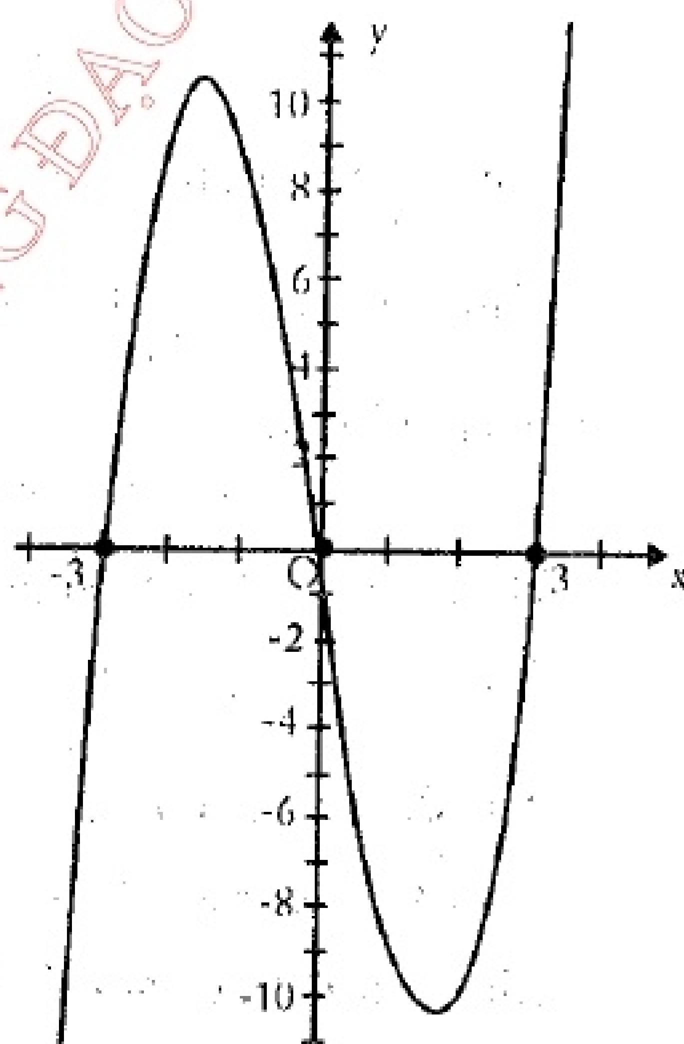
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x - 9 > 0 \\ 5^x - 5 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x - 9 < 0 \\ 5^x - 5 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

2) *(1,0 điểm)*: (xem hình 83)

Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm, có hoành độ là $x = -3$; $x = 0$ và $x = 3$.

Do tính đối xứng nên có thể tính diện tích đó theo công thức:

$$S = 2\int_{-3}^{0}\left(x^3 - 9x\right)dx = 2\left(\frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = \frac{81}{2}.$$



Hình 83

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp (ABCD).

Khi đó, SAH, SBH, SCH, SDH là các góc bằng nhau vì cùng bằng 60^0.

Suy ra HA = HB = HC = HD, hay H trùng với O là giao điểm 2 đường chéo của hình vuông ABCD (xem hình 84).

Do đó, S.ABCD là một khối chóp tứ giác đều có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và SO là đường cao của hình chóp.

1) *(1,0 điểm)*

Trong tam giác vuông SOA, ta có : $SO = OA.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

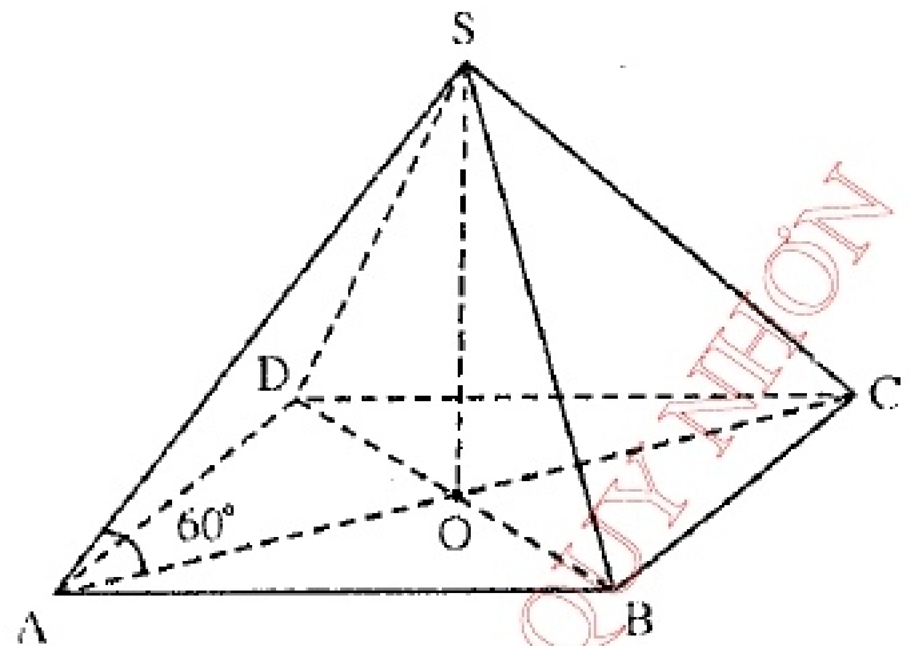
LTĐH CẤP TOÁN LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Diện tích đáy ABCD là $S_{ABCD} = a^2$.

Từ đó, thể tích khối chóp S.ABCD là

$$V_{Ch} = \frac{1}{3}.AB^2.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



Hình 84

2) *(1,0 điểm)*

Theo giả thiết, hình nón đã cho có đường cao là SO, còn đáy của hình nón đó là một hình tròn có đường kính bằng AC. Do đó, thể tích của khối nón đó là

$$V_N = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Suy ra, thể tích của phần không gian nằm trong hình nón (*N*) và nằm ngoài hình chóp S.ABCD là $V_N - V_{Ch} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12} - \frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{(\pi-2)a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 4a. *(2,0 điểm)*

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), do I thuộc Δ nên $I(1+t;5+2t;1-t)$.

Hơn nữa, mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên phải có $IA = IB$.

$\overrightarrow{IA} = (-t;1-2t;1+t)$; $\overrightarrow{IB} = (-t;-2-2t;-4+t)$.

Từ đó, ta có $\sqrt{(-t)^2+(1-2t)^2+(1+t)^2} = \sqrt{(-t)^2+(-2-2t)^2+(-4+t)^2}$

$\Leftrightarrow 18 = -2t \Leftrightarrow t = -9$.

Mặt cầu (S) có tâm là $I = (-8;-13;10)$ và bán kính là $R = IA = \sqrt{506}$ nên có phương trình: $(x+8)^2+(y+13)^2+(z-10)^2 = 506$.

Câu 5a. *(1,0 điểm)*

Ta có $(4-i)^2+(1+2i)^3 = (16-8i-1)+(1+6i-12-8i) = 4-10i$.

Suy ra $\bar{z} = 4+10i$.

Câu 4b. *(2,0 điểm)*

Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Do I thuộc Δ nên $I(1+t;1-t;1-t)$.

Hơn nữa, mặt cầu (S) đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên phải có $IA = d(I;(P))$, $\overrightarrow{IA} = (-t;-1+t;-1+t)$.

Từ đó ta có $\sqrt{(-t)^2+(-1+t)^2+(-1+t)^2} = \frac{|2.(1+t)+1.(1-t)+1.(1-t)+2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 0005 - TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$\Leftrightarrow [(-t)^2+(-1+t)^2+(-1+t)^2]=6 \Leftrightarrow 3t^2-4t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Với $t=2$, mặt cầu (S) có tâm là $I=(3;-1;-1)$ và bán kính là $R=IA=\sqrt{6}$ nên có phương trình: $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$.

Với $t=-\dfrac{2}{3}$, mặt cầu (S) có tâm là $I=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ và bán kính là $R=IA=\sqrt{6}$

nên có phương trình: $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{3}\right)^2=6.$

Câu 5b. *(1,0 điểm)*

Ta có $z=4028\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=4028\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

ĐỀ SỐ 6

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1) *(2,0 điểm)*

– Hàm số xác định trên tập $\mathbb{R}$.

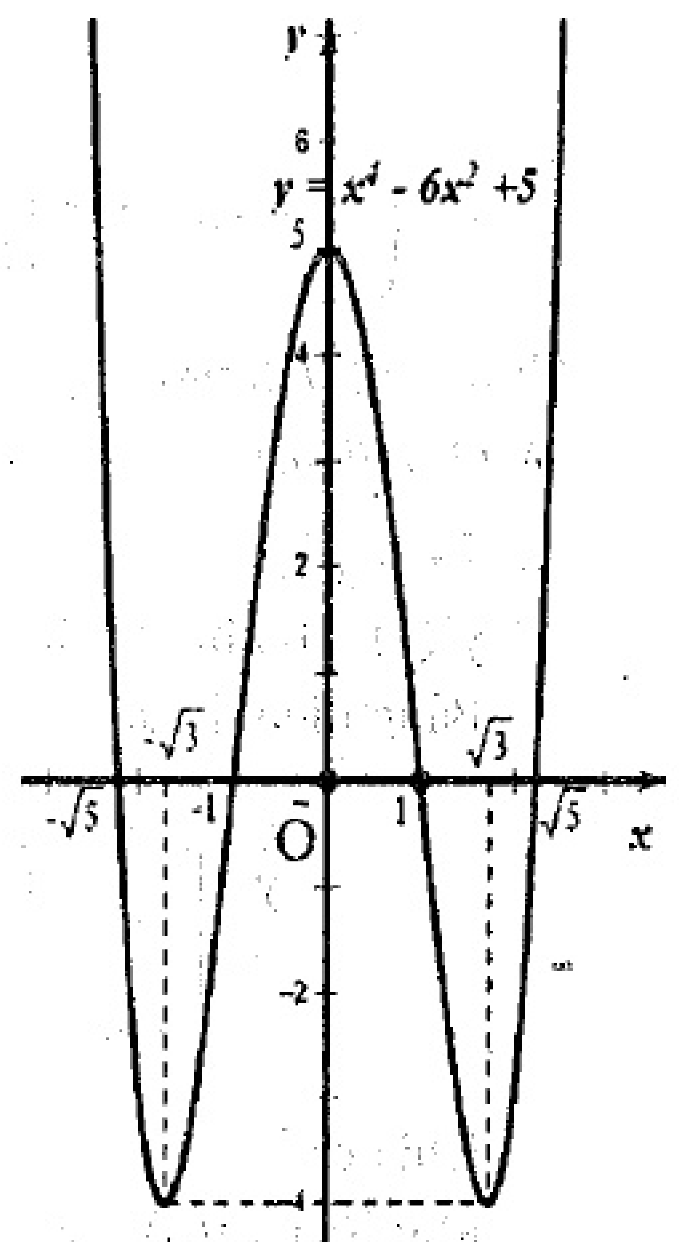
Do $y(x) = y(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho là một hàm số chẵn, suy ra đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy.

– Sự biến thiên: $y' = 4x^3 - 12x = 4x(x^2-3)$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ta có $y'(x) > 0$ trên khoảng $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$, còn $y'(x) < 0$ trên khoảng $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$.

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$.



Hình 85

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 100/B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Hàm số đạt giá trị cực tiểu y = –4 khi $x = \sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}$ và đạt giá trị cực đại y = 5 khi x = 0.

Giới hạn vô cực : $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	∞	↘	–4	↗	5	↘	–4	↗	$+\infty$

– Đồ thị: hình 85.

Đồ thị của hàm số đã cho giao với trục tung tại điểm (0; 5) và giao với trục hoành tại 4 điểm $(-\sqrt{5}; 0)$, (–1; 0), (1; 0), $(\sqrt{5}; 0)$, hơn nữa nó còn nhận trục tung làm trục đối xứng.

2) (1,0 điểm)

Do tính đối xứng suy ra diện tích cần tính là

$$S = 2\int_0^1 (x^4 - 6x^2 + 5)dx - 2\int_1^{\sqrt{5}} (x^4 - 6x^2 + 5)dx$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 5x\right)\Bigg|_0^1 - 2\left(\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 5x\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{64}{5}.$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) *(1,0 điểm)*

Ta có $y'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x - 3)$.

y'(x) = 0 khi x = 0 hoặc x = 3.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		–1		0		3		4		$+\infty$
y'		+		+		+	0	–		–	
y	$-\infty$	↗	–8	↗		↗	24	↘	–3	↘	$-\infty$

Khi đó:

Maxf(x) = f(3) = 24

Minf(x) = min{f(–1); f(4)} = min{–8; –3} = –8.

LTĐH-SĐ TOÁN - LÍ -HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2) *(1,0 điểm)*

Điều kiện $x^2 - 2014x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2014 \end{array}\right.$ (*).

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 2014x < \left(\frac{1}{\sqrt{2015}}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 2014x - 2015 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2015 \quad (**)$$

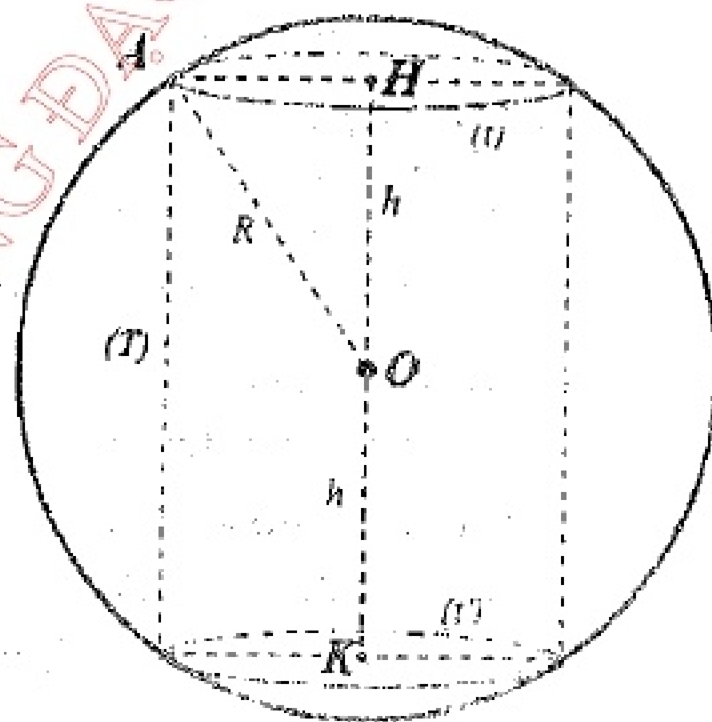
Kết hợp (*) và (**), bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-1; 0) \cup (2014; 2015)$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Xem hình 86.

Ta có OA = R, OH = OK = h nên

$AH = r = \sqrt{R^2 - h^2}$.



Hình 86

1) *(1,0 điểm)*

Diện tích toàn phần (gồm diện tích xung quanh và diện tích hai đáy) của hình trụ (T) là

$$S_{TP} = 2\pi r.2h + 2\pi r^2$$
$$= 4\pi h\sqrt{R^2 - h^2} + 2\pi(R^2 - h^2).$$

2) *(1,0 điểm)*

Thể tích khối cầu (S) là $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích khối trụ (T) là $V_T = \pi(R^2 - h^2).2h = 2\pi h(R^2 - h^2)$.

Vì vậy, thể tích phần không gian nằm trong khối cầu (S) và nằm ngoài khối trụ (T) là $V_C - V_T = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2\pi h(R^2 - h^2)$.

Câu 4a *(2,0 điểm)*

Mặt cầu (S) có tâm I(5; 4; −3) và có bán kính $R = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-3)^2 - 25} = 5$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với đường [illegible] Δ nên có một vectơ pháp tuyến là (3; 4; 12), do đó phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $3x + 4y + 12z + D = 0$.

Theo giả thiết, mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng đó phải bằng R, tức là phải có:

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

$$\frac{|3.5+4.4+12.(-3)+D|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=5 \Leftrightarrow |D-5|=65 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=70 \\ D=-60 \end{array}\right.$$

Với D = 70 ta có phương trình mặt phẳng (α) là: $3x + 4y + 12z + 70 = 0$.

Với D = –60 ta có phương trình mặt phẳng (α) là: $3x + 4y + 12z - 60 = 0$.

Câu 5a *(1,0 điểm).*

Nếu $z = x + yi$ thì theo giả thiết có $x + y = 2014$.

Vậy, trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z mà tổng phần thực và phần ảo của số đó bằng 2014 là đường thẳng có phương trình $x + y = 2014$.

Câu 4b *(2,0 điểm)*

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{BD} = (3;-12;3)$, $\overrightarrow{BC} = (3;1;1)$, $\overrightarrow{BA} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{AC} = (1;0;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;-13;1)$.

1) *(1,0 điểm)*

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 3.3 - 12.1 + 3.1 = 0$ và $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = 2.3 + 1.(-12) + 2.3 = 0$, tức là BD vuông góc với cả BC và BA, nên nó vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Lại có, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2.1 - 1.0 - 2.(-1) = 0$, tức là AB vuông góc với AC, hay BAC là tam giác vuông đỉnh A.

Như vậy, ABCD là một hình chóp có BD vuông góc với đáy, còn đáy là tam giác vuông đỉnh A.

Từ đó, thể tích của khối ABCD là:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB.AC\right).BD = \frac{1}{6}\sqrt{2^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}.\sqrt{3^2+12^2+3^2} = 9.$$

2) *(1,0 điểm)*

Ta có:

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = 1.1 + 0.13 + 1.(-1) = 0$ và $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 3.3 - 12.1 + 3.1 = 0$, suy ra DAC và DBC là các tam giác vuông có chung cạnh huyền DC.

Gọi O là trung điểm của DC, có OC = OD = OA = OB.

Theo giả thiết C(2; 2; 2), D(2; –11; 4), ta tìm được O$\left(2; -\frac{9}{2}; 3\right)$.

Câu 5b. *(1,0 điểm)*

Với i là đơn vị ảo ($i^2 = -1$) thì $(1-i)^2 = -2i$ và $(1+i)^2 = 2i$, do đó

$$\left(\frac{i^{2016} - i^{2017}}{i^{2008} + i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}}\right)^{2014} =$$

LTĐH-CĐ TOÁN LÍ-HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$= \left[\frac{i^{2016}(1-i)}{i^{2008}\left(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5\right)} \right]^{2014} =$$

$$= \left[\frac{(i^4)^{504}(1-i)}{(i^4)^{502}(1+i)} \right]^{2014} = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{2014} = \left[\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} \right]^{1007} = \left(\frac{-2i}{2i} \right)^{1007} = -1.$$

ĐỀ SỐ 7

Câu 1. Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}$.

1) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

– Chiều biến thiên: $y' = x^3 - x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$ có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

– Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, $x = 1$; $y_{CT} = y(-1) = y(1) = -\frac{1}{8}$;

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CĐ} = y(0) = \frac{1}{8}$

– Giới hạn : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

– Bảng biến thiên :

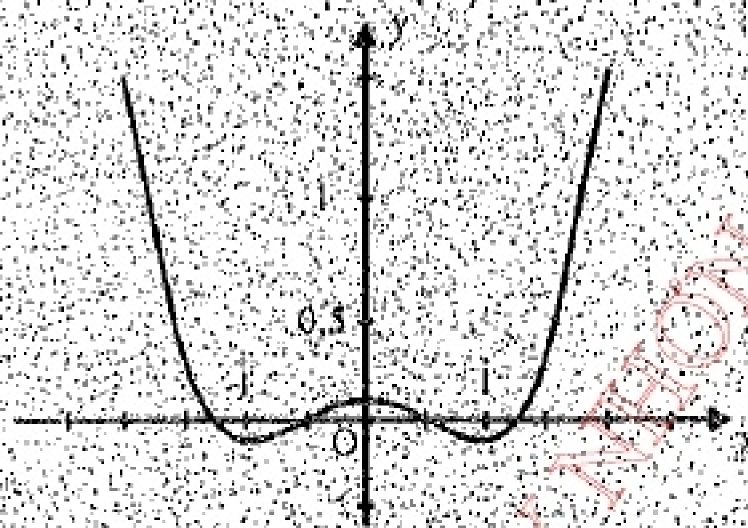
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$\frac{1}{8}$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$+\infty$

Đồ thị : (h.87)

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

2) Căn cứ đồ thị ta có 5 vị trí tương giao với (C) của đường thẳng $y = m + \frac{1}{8}$ (song song hoặc trùng với trục hoành), do đó có 5 trường hợp xét với m, cụ thể



Hình 87

* $m + \frac{1}{8} < -\frac{1}{8} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm ;

* $m + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm;

* $-\frac{1}{8} < m + \frac{1}{8} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$: Phương trình có bốn nghiệm;

* $m + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow m = 0$: Phương trình có ba nghiệm ;

* $m + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow m > 0$: Phương trình có hai nghiệm.

Câu 2.

1) Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

$$3\sqrt{\log_3 x} + \log_{\frac{1}{3}}(3x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} + \frac{1 + \log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x - 3\sqrt{\log_3 x} + 2 = 0$$

Đặt $\sqrt{\log_3 x} = t \geq 0$ đưa về phương trình trung gian $t^2 - 3t + 2 = 0$, có hai nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2$ thoả mãn điều kiện $t \geq 0$.

Từ đó có $\sqrt{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$; $\sqrt{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là x = 3 và x = 81.

2) Tính tích phân: $I = \int_1^{e^2} (1 + \ln x)x dx$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

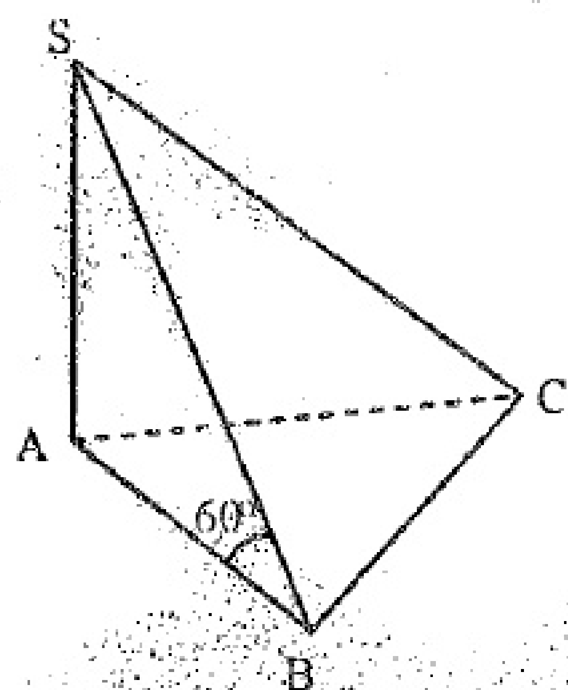
Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Thay vào công thức tích phân từng phần ta được:

$$I = \frac{x^2(1+\ln x)}{2}\Bigg|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x}{2} dx = \frac{e^4(1+2)}{2} - \frac{e^2(1+1)}{2} - \frac{x^2}{4}\Bigg|_e^{e^2}$$

$$= \frac{3e^4}{2} - e^2 - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{5e^4}{4} - \frac{3e^2}{4}.$$

Kết quả $I = \dfrac{5e^4}{4} - \dfrac{3e^2}{4}$.



Hình 88

Câu 3. Ta có SA vuông góc với đáy (ABC) nên theo định lí ba đường vuông góc có $CB \perp SB$. Vậy góc giữa mặt bên (SBC) với mặt đáy (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$ và $SA = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Do đó

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA.(\frac{1}{2} BA.BC) = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 4a

1) Tọa độ điểm I: $\overrightarrow{OI} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow I(2;3;-2)$

Tâm của mặt cầu: $I(2;3;-2)$.

Bán kính của mặt cầu: $R = d(I,(P)) = \dfrac{|2 - 2.3 - 2.(-2) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$.

2) Ta có $(Q)//(P): x - 2y - 2z - 9 = 0$ nên (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{n}_{(P)} = (1;-2;-2)$.

Do đó phương trình tổng quát của mp(Q) có dạng

$(Q): x - 2y - 2z + D = 0$ $(D \neq -9)$. mp (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I,(Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 2.3 - 2.(-2) + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|D|}{3} = 3 \Leftrightarrow |D| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 9 \\ D = -9 \end{array}\right.$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2009 - TRẦN HỮNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Theo giả thiết $(Q)\cap(P)=\varnothing$, nên lấy $D = 9$. Vậy phương trình tổng quát của mp(Q) là : $x-2y-2z+9=0$.

Câu 5a.

Ta có $z=6-8i \Rightarrow \overline{z}=6+8i$; $3z+2\overline{z}=3.(6-8i)+2(6+8i)=30-8i$;

$\frac{100i}{z}=\frac{100i}{6-8i}=\frac{100i(6+8i)}{6^2+8^2}=-8+6i.$

Vậy toạ độ các điểm biểu diễn số phức $3z+2\overline{z}$ và $\frac{100i}{z}$ tương ứng là (30; −8) và (−8; 6).

Câu 4b

1) Gọi H là hình chiếu của A trên d thì $H(2+t;1+2t;t)$, do đó $\overrightarrow{AH}=(3+t;2t-1;t-7)$.

Do $AH \perp d$ nên

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (3+t).1+(2t-1).2+(t-7).1=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$.

Vậy toạ độ hình chiếu của A trên d là $H(3;3;1)$.

2) Tâm của mặt cầu $A(-1;2;7)$.

Bán kính mặt cầu: $R=AH=\sqrt{4^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{53}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=53$.

Câu 5b. ĐK: $x>0$ và $y>0$. Ta có

$$\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9\\ x+y-20=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_4 xy=\log_4 36\\ x+y-20=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=36\\ x+y=20\end{cases}$$

Từ đó có x và y là nghiệm của phương trình: $X^2-20X+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=18\\ X=2\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: (18 ; 2) và (2 ; 18).

ĐỀ SỐ 8

Câu 1. Hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$.

1) a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Sự biến thiên:

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

* Chiều biến thiên: $y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

* Tiệm cận:

$\lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = +\infty$; $\Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng.

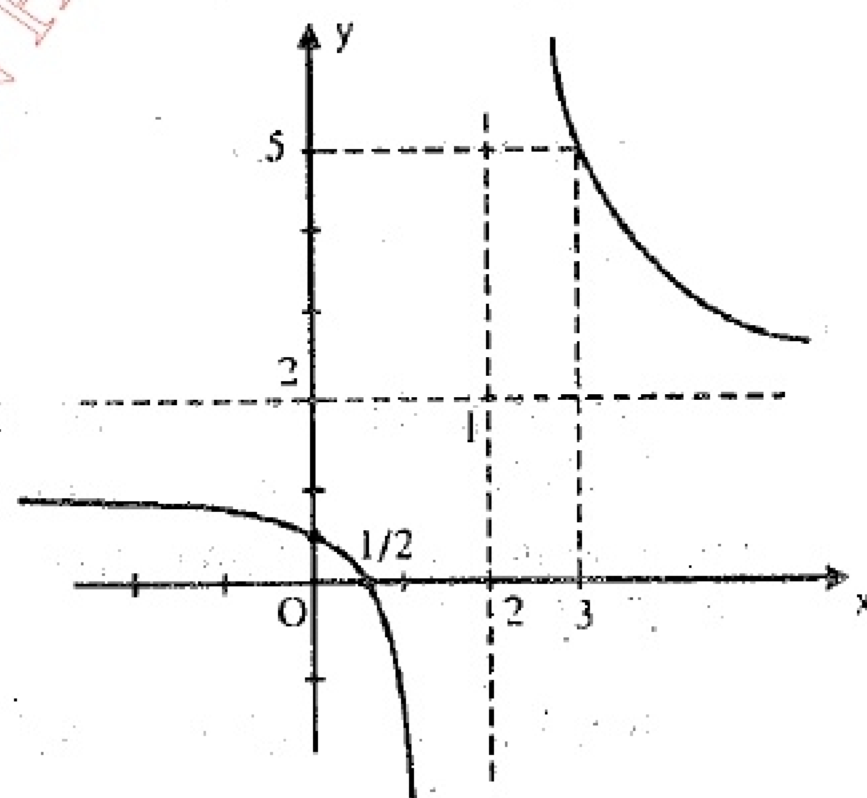
$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2$; $\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2$; $\Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	−	‖	−
y	2 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

c) Đồ thị (C): Hình 89

Đồ thị hàm số giao với trục tung tại $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; với trục hoành tại $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và nhận I(2 ; 2) làm tâm đối xứng.



Hình 89

2) Với $y = 5 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 5 \Rightarrow x = 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(3; 5) thuộc (C) có dạng

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Ta có $f'(3) = -3$; Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y = -3(x-3) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 14$.

Câu 2.

1) Điều kiện $x \neq 0$. Ta có

$$3^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 108 = 2^2.3^3 \Leftrightarrow \log_2(3^x.8^{\frac{x-1}{x}}) = \log_2(2^2.3^3)$$

$$\Leftrightarrow x.\log_2 3 + 3.\frac{x-1}{x} = 2 + 3\log_2 3 \Leftrightarrow x^2\log_2 3 - (3\log_2 3 - 1)x - 3 = 0;$$

$$\Delta = (3\log_2 3 - 1)^2 + 12\log_2 3 = (3\log_2 3 + 1)^2 \geq 0.$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 2008 TRẦN HÙNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$x_1 = \frac{(3\log_2 3 - 1) + (3\log_2 3 + 1)}{2\log_2 3} = 3;$$

$$x_2 = \frac{(3\log_2 3 - 1) - (3\log_2 3 + 1)}{2\log_2 3} = \frac{-1}{\log_2 3} = -\log_3 2.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 3$ và $x = -\log_3 2$.

2) $\int_0^{\pi}\left(e^{\cos x} + x\right)\sin x dx = \int_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x dx + \int_0^{\pi} x\sin x dx$

$$= \int_0^{\pi} -d(e^{\cos x}) + (-x\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)dx = -e^{\cos x}\Big|_0^{\pi} - x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi}$$

$$= (-e^{-1} + e^{1}) - (-\pi + 0) + (0 - 0) = e + \pi - \frac{1}{e} \approx 5,4920.$$

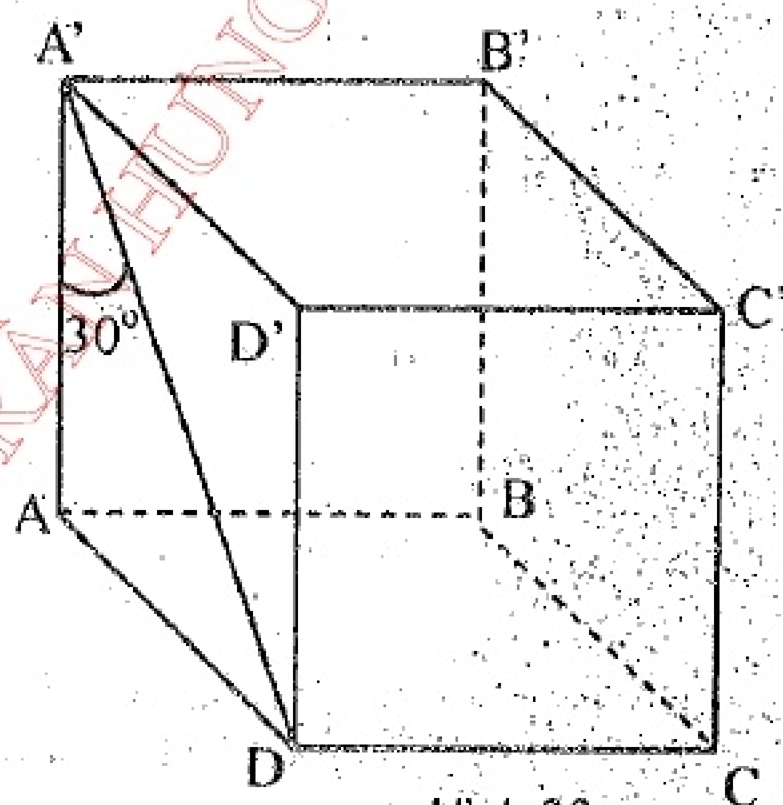
Câu 3. Ta có AA' là hình chiếu của A'D trên mp (A'AB) và $\widehat{DA'A} = 30^o$,

$AA' = AD.\cot 30^o = a\sqrt{3}$ (h.90).

Do đó

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA'$

$= a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$



Hình 90

Câu 4a.

1) Do I là trung điểm của AB, nên I có toạ độ là $I(1;2;-2)$. Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính, nên nhận trung điểm I của AB làm tâm và có bán kính

$$R = IA = \sqrt{(1+5)^2 + (2-0)^2 + (-2-1)^2} = 7.$$

Từ đó có phương trình mặt cầu là (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$ là

$$d(I,(P)) = \frac{|1 + 2.2 - 2.(-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

2) Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;2;-2)$, đồng thời vuông góc với $mp(P): x + 2y - 2z = 0$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_P = (1;2;-2)$. Từ đó có phương trình tham số của đường thẳng d là

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HOÁ 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Ta có $M = d \cap (P) \Rightarrow M(x; y; z)$ có tọa độ thỏa mãn đồng thời cả hai phương trình của d và của mp(P), nghĩa là có $M(1 + t; 2 + 2t; -2 - 2t)$ và

$$1 + t + 2(2 + 2t) - 2(-2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Thay giá trị tham số $t = -1$ ta được toạ độ giao điểm của d và mp(P) là $M(x; y; z) \equiv O(0;0;0)$.

Câu 5a. Ta có $z = \left(2 + \sqrt{3}i\right)\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}i\right) = 2.\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - (\sqrt{3}i)^2 = 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy, $z = 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{91}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2}$

Câu 4b.

1) Từ phương trình đã cho của đường thẳng d, ta có d đi qua điểm $M_0(2;1;0)$ nhận vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;1)$; Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A trên d thì tọa độ của A' là $A'(2 + t; 1 + 2t; t)$, do đó có $\overrightarrow{AA'} = (2 + t; 2t - 5; t - 4)$.

Vì $\overrightarrow{AA'} \perp \vec{u}$, nên

$$1(2 + t) + 2(2t - 5) + 1(t - 4) = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Thay t = 2 vào toạ độ A' ta được $A'(4;5;2)$.

2) Mặt cầu (S) có tâm $A(0;6;4)$, tiếp xúc với đường thẳng d nên (S) đi qua $A'(4;5;2)$;

Do đó, (S) có bán kính $R = AA' = \sqrt{(4 - 0)^2 + (5 - 6)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{21}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $x^2 + (y - 6)^2 + (z - 4)^2 = 21$.

Câu 5b. Phương trình $z^2 - (3 + 4i)z + (-1 + 5i) = 0$ (*) có

$\Delta = (3 + 4i)^2 - 4.1.(-1 + 5i) = 9 + 24i + 16i^2 + 4 - 20i = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm phức:

$z_1 = \frac{(3 + 4i) + (1 + 2i)}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$; $z_2 = \frac{(3 + 4i) - (1 + 2i)}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$;

$T = z_1^3 + z_2^3 = (2 + 3i)^3 + (1 + i)^3$.

Vậy có $T = 2^3 + 3.2^2.(3i) + 3.2.(3i)^2 + (3i)^3 + 1 + 3i + 3.i^2 + i^3 = -48 + 11i$.

LTĐH-ĐỀ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

ĐỀ SỐ 9

Câu 1.

1. Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Sự biến thiên : $y' = \dfrac{-2(x-1)-(3-2x)}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng (–∞; 1) và (1; +∞).

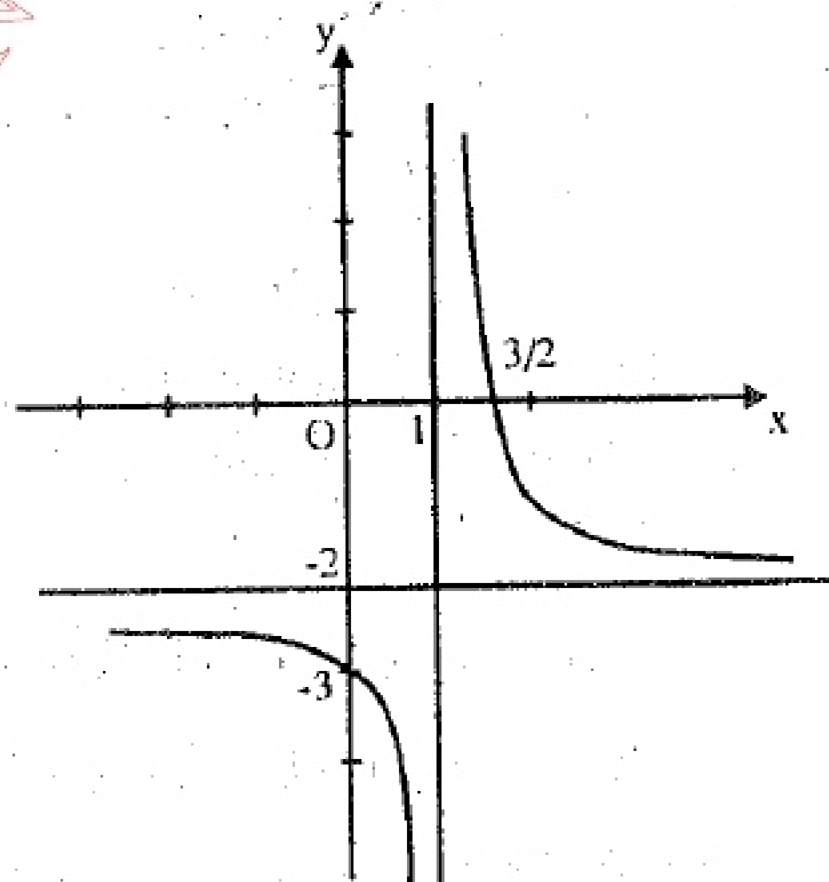
Hàm số không có cực trị .

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = -2$; $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận đứng là: x = 1 và tiệm cận ngang là y = –2.

Bảng biến thiên :

x	–∞		1		+∞
y'		–	‖	–	
y	–2 ↘	–∞	‖	+∞ ↘	–2

Đồ thị (hình 91): Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0;–3), cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. Hai đường tiệm cận cắt nhau tại điểm I(1;–2) là tâm đối xứng của đồ thị .



Hình 91

2) Đường thẳng $y = mx + 2$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{3-2x}{x-1} = mx + 2$ có hai nghiệm phân biệt, hay phương trình $3 - 2x = (mx+2)(x-1)$ (tương đương với phương trình $mx^2 - (m-4)x - 5 = 0$) có hai nghiệm phân biệt khác 1. Vậy ta phải có:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m-4)^2 + 20m > 0 \\ m.1^2 - (m-4).1 - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 12m + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -6 - 2\sqrt{5} \\ -6 + 2\sqrt{5} < m < 0 \\ m > 0 \end{array}\right.$$

LTĐHCĐ TOÁN LÍ HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 2.

1) Đặt $t = 2^x$ thì $t > 0$ và $4^x = t^2$. Bất phương trình đã cho trở thành :

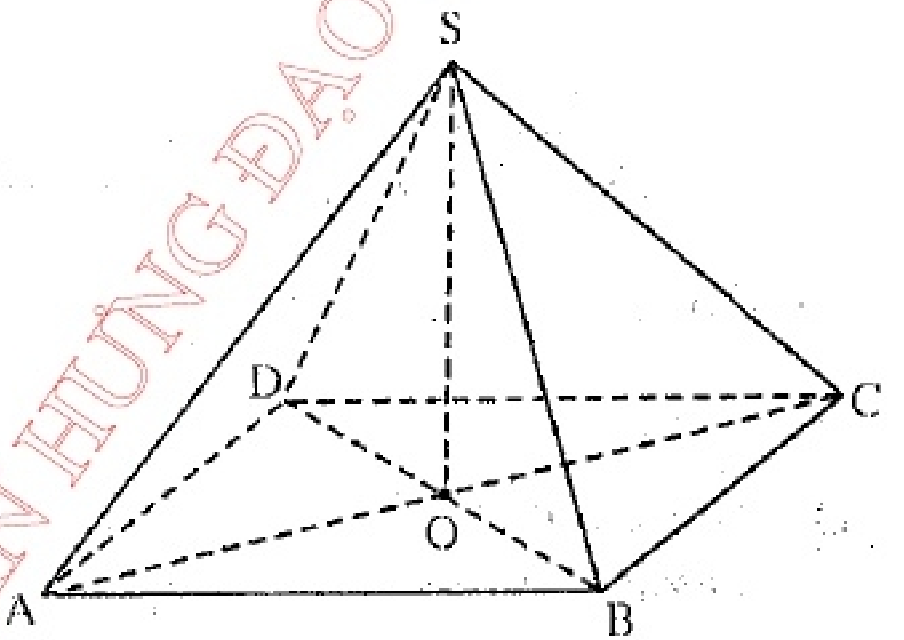
$t^2 - 4t - 32 > 0 \Leftrightarrow (t+4)(t-8) > 0$.

Vì $t > 0$ nên $t > 8$ hay là $2^x > 8$. Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

2) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx = \left(-\cos x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - (-1) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Câu 3.

1) Gọi SO là đường cao của hình chóp S.ABCD. Vì S cách đều bốn đỉnh A, B, C, D nên O cũng cách đều bốn đỉnh đó. Suy ra hình thoi ABCD là hình vuông với tâm O. Hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác đều (hình vuông) và có các cạnh bên bằng nhau nên đó là hình chóp tứ giác đều.



Hình 92

Tam giác SAC có SA = SC = a và $AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a) nên $SO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích hình vuông ABCD bằng a^2 nên :

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2 . \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

2) Vì $OS = OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ đi qua các đỉnh của hình chóp. Diện tích của mặt cầu là :

$$4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2.$$

Câu 4a. Gọi tâm mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$. Vì (S) đi qua A và B nên IA = IB hay

$(a+1)^2 + b^2 + (c+4)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 + (c+2)^2 \Leftrightarrow 2a + 2b + c - 3 = 0$ (*).

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mp(P) tại điểm $B \in (P)$ nên $\overrightarrow{BI} = (a-3; b-4; c+2)$ là vectơ pháp tuyến của mp(P), tức là cùng phương với vectơ $\vec{n}(2;2;1)$, suy ra

LTĐH-CĐ TOÁN - LÝ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN
http://sachviet.edu.vn

$\frac{a-3}{2}=\frac{b-4}{2}=\frac{c+2}{1}=k$ hay là $a=3+2k$, $b=4+2k$, $c=-2+k$.

Thay vào (*) ta có:

$$2(3+2k)+2(4+2k)+(-2+k)-3=0 \Leftrightarrow 9k+9=0 \Leftrightarrow k=-1.$$

Vậy $a=1$, $b=2$, $c=-3$, tức là mặt cầu có tâm $I=(1;2;-3)$. Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{(1+1)^2+2^2+(-3+4)^2}=3$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Thể tích mặt cầu (S) là $V=\frac{4}{3}\pi.3^3=36\pi$.

Câu 5a. Ta có:

$$z=\frac{2+3i}{(2+i)^2}=\frac{2+3i}{4+i^2+4i}=\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6+12+9i-8i}{9+16}=\frac{18+i}{25}.$$

Vậy z có phần thực là $\frac{18}{25}$ và phần ảo là $\frac{1}{25}$.

Câu 4b.

1) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;3;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;-2;1)$. Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'(0;1;-5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(0;1;-2)$. Vì mặt phẳng (α) song song với Δ và Δ' nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{u'}$.

Bởi vậy có thể lấy $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=(3;4;2)$.

Vì $mp(\alpha)$ cách đều Δ và Δ' nên (α) phải đi qua trung điểm I của đoạn thẳng MM'. Ta có $I=(1;2;-3)$ nên phương trình của $mp(\alpha)$ là: $3(x-1)+4(y-2)+2(z+3)=0$ hay: $3x+4y+2z-5=0$.

2) *Cách 1.* Giả sử đường vuông góc chung của Δ và Δ' cắt Δ và Δ' lần lượt tại P và P', cắt $mp(\alpha)$ tại H thì độ dài đường vuông góc chung là:

$$PP'=2PH=2d(P,(\alpha))=2d(M,(\alpha))=\frac{2\left|3\times2+4\times3-2\times1-5\right|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\frac{22}{\sqrt{29}}.$$

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{M'M}=(2;2;4)$ nên khoảng cách giữa Δ và Δ' là:

$$d(\Delta,\Delta')=\frac{\left|\left[\vec{u};\vec{u'}\right].\overrightarrow{M'M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{M'M}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|3\times2+4\times2+2\times4\right|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\frac{22}{\sqrt{29}}.$$

LTĐH-CĐ TOÁN ... 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 5b. Ta có : $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$. Bởi vậy (với chú ý rằng $i^4=1$)

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2011}=i^{2011}=\frac{i^{2012}}{i}=\frac{\left(i^4\right)^{503}}{i}=\frac{1^{503}}{i}=\frac{1}{i}=-i.$$

ĐỀ SỐ 10

Câu 1. 1) +) Tập xác định : $\mathbb{R}$

+) Ta có $y'=6x^2-6x$; $y'=0$ khi $x=0$ hoặc $x=1$.

+) Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	−4	↘	−5	↗	$+\infty$

Đồ thị: Hình 93.

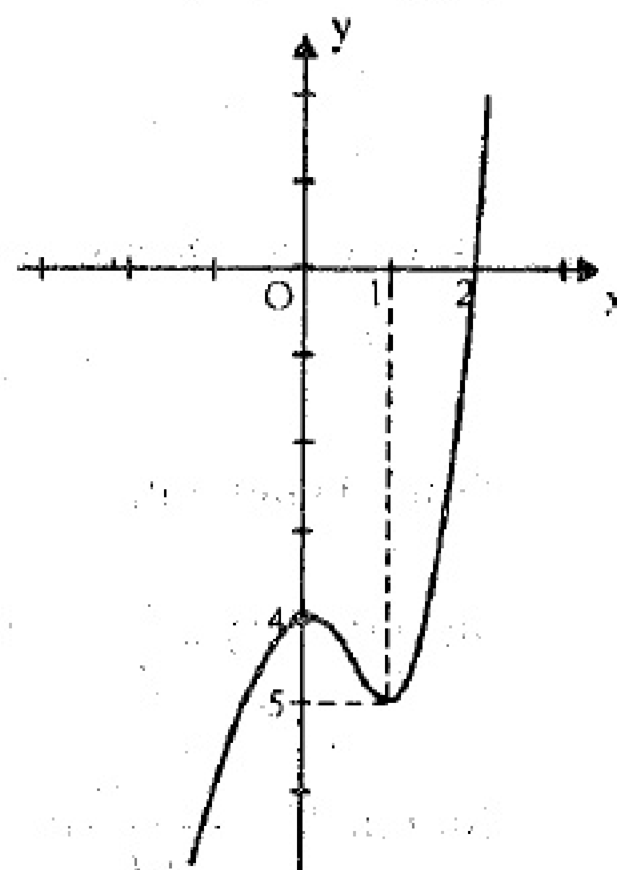
Đồ thị giao với trục tung: (0; −4); giao với trục hoành: (2; 0)

2) Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có hệ số góc $k=y'(x_0)=6x_0^2-6x_0$. Vì tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng (d) nên $k=12$, do đó $6x_0^2-6x_0=12 \Leftrightarrow x_0^2-x_0-2=0$.

Suy ra $x_0=-1$ hoặc $x_0=2$.

Với $x_0=-1$ ta có $y_0=-9$, $y'(x_0)=12$ nên có tiếp tuyến $y=12(x+1)-9 \Leftrightarrow y=12x+3$.

Với $x_0=2$ ta có $y_0=0$, $y'(x_0)=12$ nên có tiếp tuyến $y=12(x-2) \Leftrightarrow y=12x-24$.



Hình 93

Câu 2

1) $5x^2+y^2-4xy+4x+4=0 \Leftrightarrow 5x^2-4(y-1)x+y^2+4=0.$ (1)

Xem (1) là phương trình bậc hai đối với x , ta có

$\Delta'=4(y-1)^2-5(y^2+4)=-y^2-8y-16=-(y+4)^2\le 0.$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta'=0 \Leftrightarrow y=-4$.

Khi đó (1) trở thành

$5x^2-4(-4-1)x+16+4=0 \Leftrightarrow 5x^2+20x+20=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-2$; $y=-4$.

LTĐH CO TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Lưu ý. Có thể viết vế trái thành $(y-2x)^2+(x+2)^2$ rồi suy ra nghiệm của phương trình.

2) Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$ và khi x = 0 thì t = 0, khi x = 1 thì t = 1.

Vậy: $I=\int_0^1\left(8x^3-2x\right)e^{x^2}dx=\int_0^1(4t-1)e^t dt$.

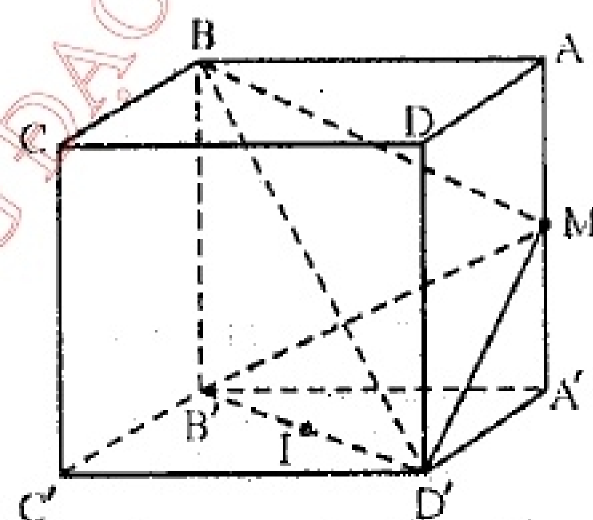
Đặt $u=4t-1$, $dv=e^t dt$. Khi đó ta có: $du=4dt$, $v=e^t$ và do đó:

$$I=(4t-1)e^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t 4dt=3e+1-4e^t\Big|_0^1=5-e.$$

Câu 3. *Cách 1*. (hình 94) Gọi V là thể tích tứ diện BMB'D'. Ta có $dt(MBB')=\frac{1}{2}dt(ABB'A')=\frac{a^2}{2}$.

Đường cao của tứ diện hạ từ D' là D'A' = a. Suy ra:

$$V=\frac{1}{3}dt(MBB').D'A'=\frac{a^3}{6}.$$



Hình 94

Gọi h là khoảng cách từ B tới mp(MB'D') thì $V=\frac{1}{3}dt(MB'D').h$.

Gọi I là tâm hình vuông A'B'C'D' thì

$$dt(MB'D')=\frac{1}{2}MI.B'D'=\frac{1}{2}.\frac{AC'}{2}\cdot B'D'=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Suy ra $V=\frac{a^2\sqrt{6}}{12}h=\frac{a^3}{6}\Rightarrow h=\frac{2a}{\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $O\equiv A'=(0;0;0)$, $D'=(a;0;0)$, $B'=(0;a;0)$, $A=(0;0;a)$. Khi đó $M=\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm D', B', M có phương trình (theo đoạn chắn): $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{\frac{a}{2}}=1$ hay $x+y+2z-a=0$.

Khoảng cách từ điểm B(0;a;a) tới mp(MB'D') là $h=\frac{|a+2a-a|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

LTĐH-CĐ TOÁN LÊ - KHOA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Câu 4a. Theo giả thiết ta có $B=(2+t;t;2t)$ và $C=(2+3t';t';-4t')$. Vì M là trung điểm BC nên $\begin{cases}\dfrac{2+t+2+3t'}{2}=1\\ \dfrac{t+t'}{2}=0\\ \dfrac{2t-4t'}{2}=3\end{cases}$

Từ đó ta có $t=1$ và $t'=-1$.

Như vậy : $B=(3;1;2)$ và $C=(-1;-1;4)$. Ta có $\overrightarrow{BC}=(-4;-2;2)$, vậy có thể chọn vectơ $\vec{w}(2;1;-1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng BC.

Ngoài ra, BC đi qua điểm M nên nó có phương trình : $\begin{cases}x=1+2t\\ y=\quad t\\ z=3-t\end{cases}$

Câu 5a. $z-1=\dfrac{z-18}{z-2}\Leftrightarrow(z-1)(z-2)=z-18\Leftrightarrow z^2-4z+20=0\Leftrightarrow z=2(1\pm 2i)$.

Từ đó suy ra $\bar{z}=2(1\mp 2i)$ và $w=\bar{z}+2i=2(1\mp 2i)+2i \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}w=2-2i\\ w=2+6i\end{array}\right.$

Với $w=2-2i$ thì $|w|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$;

Với $w=2+6i$ thì $|w|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Câu 4b. 1) Tâm mặt cầu là điểm có tọa độ $(-m;-n;m+n)$. Điều đó chứng tỏ rằng tâm mặt cầu luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình : $x+y+z=0$.

2) Giả sử điểm $A(a;b;c)$ là điểm cố định mà mọi mặt cầu luôn đi qua. Khi đó phương trình sau đây đúng với mọi cặp số m và n:

$$a^2+b^2+c^2+2ma+2nb-2(m+n)c-2(m+n+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-c-1)m+2(b-c-1)n+a^2+b^2+c^2-2=0 \quad (1)$$

Vì đẳng thức (1) đúng với mọi m và n nên :

$$\begin{cases}a-c-1=0\\ b-c-1=0\\ a^2+b^2+c^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c+1\\ (c+1)^2+(c+1)^2+c^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c+1\\ 3c^2+4c=0\end{cases}$$

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 2008 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Phương trình thứ hai cho ta $c = 0$ hoặc $c = -\frac{4}{3}$.

Với $c = 0$ thì $a = b = 1$ và điểm cố định là $A = (1;1;0)$;

Với $c = -\frac{4}{3}$ thì $a = b = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$ và điểm cố định là $A' = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Câu 5b. Xét phương trình $z^2 - 3z + 2 + 3\sqrt{2}\,i = 0$.

Ta có $\Delta = 9 - 4\left(2 + 3\sqrt{2}\,i\right) = 1 - 12\sqrt{2}\,i$.

Ta tìm số phức $w = a + bi$ sao cho $w^2 = \Delta$, tức là : $a^2 - b^2 + 2abi = 1 - 12\sqrt{2}\,i$,

suy ra : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = -12\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 1 + 288 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{289} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 8 \end{cases}$$

Vậy ta có $a = \pm 3$ và $b = \pm 2\sqrt{2}$. Nhưng vì $2ab = -12\sqrt{2}$ nên ta có :
$w = \pm\left(3 - 2\sqrt{2}i\right)$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $z = \dfrac{3 \pm \left(3 - 2\sqrt{2}\,i\right)}{2}$, cụ thể là

$$z_1 = \frac{3 + \left(3 - 2\sqrt{2}\,i\right)}{2} = 3 - \sqrt{2}i \text{ và } z_2 = \frac{3 - \left(3 - 2\sqrt{2}\,i\right)}{2} = \sqrt{2}i.$$

LUYỆN THI TOÁN - LÍ - HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Mục lục

Trang

Lời nói đầu 3

Phần một

Các bài toán ôn tập theo chủ đề 5

Chủ đề 1. Ứng dụng đạo hàm, khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số 5

Chủ đề 2. Hàm số luỹ thừa, hàm số mũ và hàm số lôgarit 37

Chủ đề 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng 49

Chủ đề 4. Số phức 61

Chủ đề 5. Khối đa diện 70

Chủ đề 6. Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón 89

Chủ đề 7. Phương pháp toạ độ trong không gian 107

Phần hai

Một số đề tham khảo 131

Hướng dẫn – Lời giải - Đáp số 143

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ -HÓA 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

http://sachviet.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Tổng Giám đốc CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập lần đầu :
NGUYỄN XUÂN BÌNH – PHAN THỊ MINH NGUYỆT
Biên tập tái bản và sửa bản in :
NGUYỄN XUÂN BÌNH – ĐẶNG MINH THU
Biên tập kĩ thuật :
THÁI MỸ DUNG
Trình bày bìa :
ĐINH THANH LIÊM
Chế bản :
THÁI MỸ DUNG

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM HỌC 2013 – 2014

MÔN TOÁN

Mã số: C3T06a4-ĐTN
Số ĐKKH xuất bản: 200-2014/CXB/99-89/GD.

In 30.000 bản (QĐ 78), khổ 17 x 24 cm
In tại Cty TNHH Một thành viên In Quân Đội 2
65 Hồ Văn Huê - P.9 - Q. Phú Nhuận - TP.HCM
In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2014.

LTĐH-CĐ TOÁN - LÍ - HÓA 0000 TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN
http://sachviet.edu.vn